

Trabajo Grupal Integrador
Short 360

Leonardo Alberto Desimone,* María del Carmen Alvarez Granda**

22 de noviembre de 2023

Resumen

En este trabajo práctico integrador correspondiente al curso de *Mecánica del Vuelo*, se llevó a cabo un estudio exhaustivo y análisis detallado de la aeronave asignada al grupo, el *Short 360*. El enfoque se centró en investigar aspectos clave como la *performance* de vuelo, su *estabilidad estática* y *estabilidad dinámica*. Se procedió a realizar comparaciones meticulosas entre los valores obtenidos en el análisis y aquellos proporcionados por el fabricante, además de efectuar una validación rigurosa en concordancia con las normativas pertinentes.

Palabras clave: Performance, estabilidad estática, estabilidad mecánica, Short 360.

Abstract

In this integrated practical work for the course *Flight Mechanics*, an in-depth study and analysis were conducted on the group-assigned aircraft, the *Short 360*. The focus encompassed exploring critical aspects including flight *performance*, *static stability*, and *dynamic stability*. Comprehensive comparisons were drawn between the analysis results and manufacturer-provided data, accompanied by meticulous validation in alignment with relevant regulations.

Keywords: Performance, static stability, dynamic stability, Short 360.

*leonardo.desimone@mi.unc.edu.ar
**maria.alvarez@mi.unc.edu.ar



Índice


UNC
FCEFyN
DA
Departamento
de Aeronáutica


UNC
FCEFyN
DA
Departamento
de Aeronáutica


UNC
FCEFyN
DA
Departamento
de Aeronáutica



1. Introducción

En el presente documento se abordará la elaboración colaborativa del proyecto integrador grupal para la asignatura de especialización en *Mecánica del Vuelo*. En los contenidos de esta carpeta se explorarán y analizarán los aspectos relacionados con la *Performance*, *Estabilidad Estática* y *Estabilidad Dinámica* de la aeronave asignada al grupo, el Short 360.

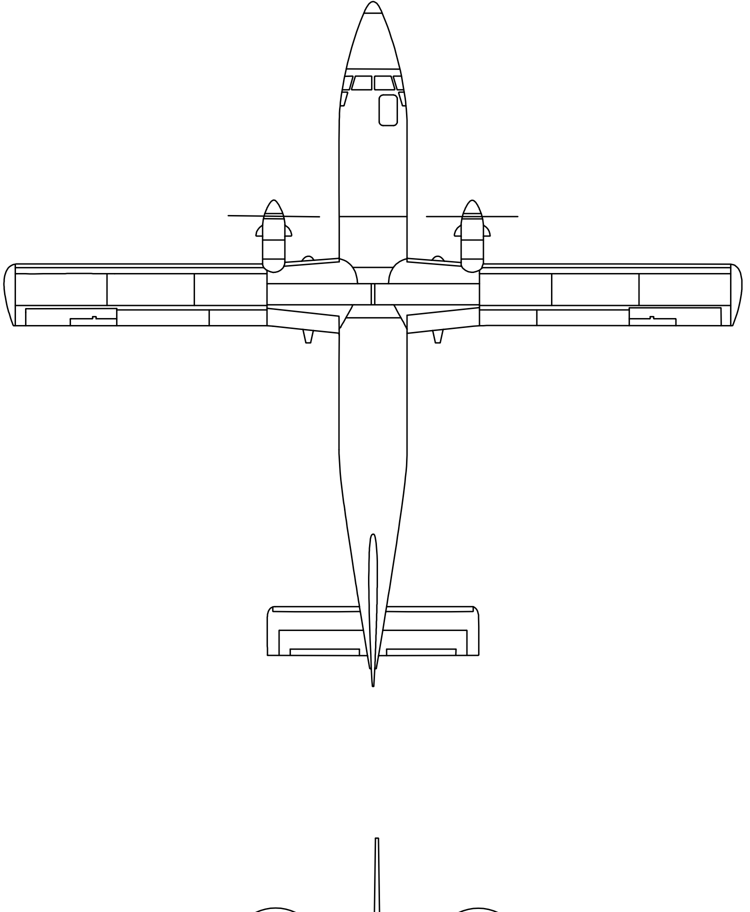
1.1. Descripción de la aeronave

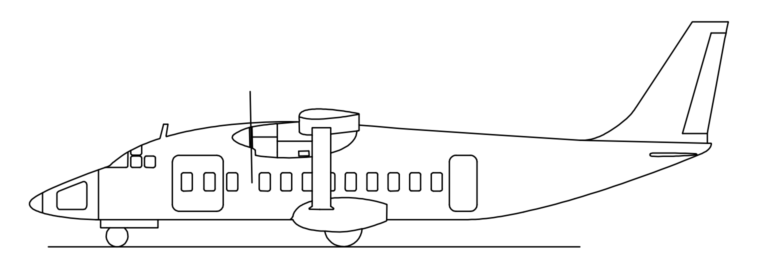
El *Shorts 360*, también conocido como SD3-60, es una aeronave de transporte regional desarrollada por la compañía británica *Short Brothers plc*. Este proyecto surgió en respuesta al crecimiento del transporte aéreo regional en la década de 1970 y la demanda de aerolíneas europeas de aeronaves de este tipo. En 1980, se presentó al público el desarrollo del Short 360. El 1 de junio de 1981, el primer prototipo realizó su vuelo inaugural. Después de tres meses, el 3 de septiembre de 1981, la aeronave recibió su certificado tipo (EASA, 2019). El 19 de agosto de 1982, el primer avión de producción completó su primer vuelo y en noviembre de 1982, comenzó a operar con Suburban Airlines (Corner, 2023). En la Figura 1 se muestra el prototipo con matrícula G-ROOM.



Figura 1: Short 360

Se construyeron un total de 165 unidades hasta 1991 y se muestra una visualización en 3 vistas de la aeronave en la Figura 2 obtenida del manual de vuelo de la aeronave (Short Brothers plc., 1985).





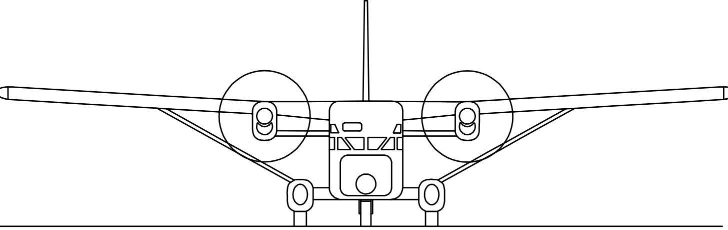


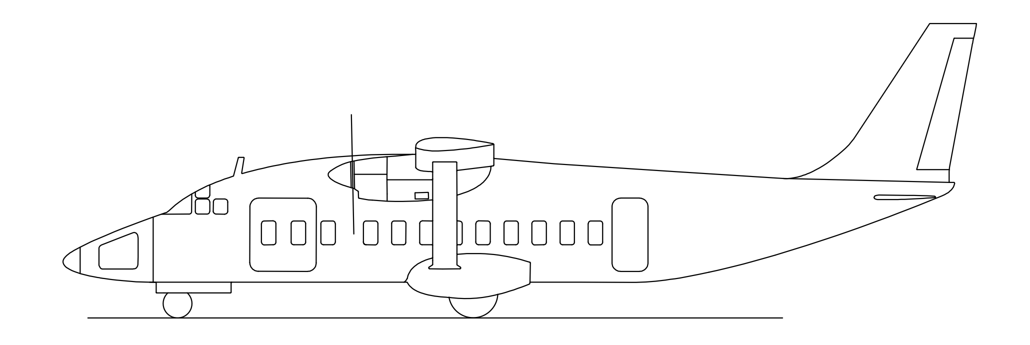
Figura 2: Visualización en 3 vistas de la aeronave asignada



Se presentan algunas características importantes de la aeronave en la siguiente Tabla 1

Tabla 1: Características de la Aeronave

Características generales			
Designación	*Simbología*	*Valor*	*Unidad*
Envergadura	b	22.80	m
Superficie alar	S	42.73	m^2
Altura	h_{tot}	7.21	m
Longitud	l_{tot}	21.58	m
Cuerda raíz	c_r	2.27	m
Cuerda puntera	c_t	1.92	m
Peso en vacío	W_{Vacio}	7870.00	kg
Peso máximo	W_{Max}	12000.00	kg
Tripulación	N_{crew}	3	-
Capacidad	$N_{passengers}$	36	-
Perfil raíz		*NACA 63A418*	
Perfil puntera		*NACA 63A414*	
Perfil E.H.		*NACA 0012*	
Perfil E.V.		*NACA 0016*	
Motor	*Pratt & Whitney Canada PT6A - 65R*		1062 kW
Hélice	*Hartzell Model HC-B5MP-3C/M10876ASK*		5 palas



2. Performance

2.1. Introducción

La *performance* de una aeronave engloba una serie de atributos que definen el comportamiento y las capacidades de un avión en relación con su propósito de fabricación. Estos atributos establecen límites en magnitudes críticas, como velocidades máximas y mínimas, tasas máximas de ascenso y otros parámetros esenciales.

La adecuada determinación y comunicación de estos aspectos resulta de suma importancia para garantizar una operación segura y eficiente de la aeronave. Al entender y tener pleno conocimiento de las capacidades inherentes de la aeronave, la tripulación puede tomar decisiones informadas durante el vuelo y adaptarse a diferentes situaciones. Esto es especialmente crucial en situaciones de emergencia o condiciones climáticas adversas, donde el conocimiento preciso de las capacidades de la aeronave puede marcar la diferencia entre un aterrizaje seguro y una situación peligrosa.

Como principio fundamental en la ingeniería aeronáutica, estas capacidades deben estar en línea con las regulaciones y normativas establecidas por las autoridades de aeronavegabilidad. Estas normativas no solo garantizan la seguridad de las operaciones aéreas, sino que también buscan mantener un nivel de calidad y rendimiento uniformes en la industria de la aviación.

En este sentido, este trabajo se enfocará en explorar en profundidad los diversos aspectos que componen la *performance* de una aeronave, examinando cómo estas características influyen en la operación y en la experiencia de vuelo. Además, se buscará verificar el cumplimiento de las normativas de aeronavegabilidad vigentes que aplican al tipo de aeronave que se está estudiando.

2.2. Vuelo estacionario, recto y nivelado

2.2.1. Introducción

En esta sección, procederemos a llevar a cabo un análisis exhaustivo de la *performance* durante el vuelo nivelado de la aeronave asignada al grupo, el *Short 360*. El enfoque principal de esta sección consiste en determinar, mediante una metodología detallada que expondremos posteriormente, la denominada ”envolvente de vuelo” de la aeronave. Esta curva distintiva define de manera precisa el rango dentro del cual la aeronave es capaz de mantener un vuelo nivelado y recto. Además de presentar la envolvente, se exhibirán las gráficas correspondientes a la potencia requerida y la potencia disponible en diversas altitudes, tomando en consideración la variación de la velocidad.

2.2.2. Metodología

Para el desarrollo del cálculo se siguió la metodología presentada por la cátedra, la cual se desarrolla en plenitud en la bibliografía recomendada (Roskam y Lan, 1997).

2.2.2.1 Hipótesis Simplificativas

Las hipótesis utilizadas para la metodología propuesta, se detallan a continuación:



- Se considera una aeronave en vuelo nivelado estacionario donde los parámetros de velocidad y altitud permanecen constantes.
- Ángulos de incidencia y trayectoria recta pequeños $\gamma \approx 0$ vuelo recto.
- La aeronave se encuentra en condición trimada, es decir se considera la ausencia de momentos y fuerzas netos
- Se asume que todas las fuerzas actúan en el centro de gravedad de la aeronave y que la masa de la aeronave es constante todo el tiempo.
- Se considera la ausencia de velocidades angulares

2.2.2.2 Datos necesarios

Los datos necesarios se presentan en la Tabla 2, los mismos fueron obtenidos por medio de relevamientos y del manual de vuelo de la aeronave " *Flight Manual for the SD3-60* " (Short Brothers plc., 1985).

Tabla 2: Datos necesarios

Designación	Simbología	Valor	Unidad
Superficie alar	S_w	42.17	m^2
Peso de la aeronave	W	94019	N
Coef. de sustentación máximo	$C_{L_{max}}$	1.7763	-

Velocidad de pérdida

Para determinar el valor de $C_{L_{max}}$, fue necesario obtener la velocidad de pérdida. Para este propósito, se utilizó el gráfico representado en la Figura 3, el cual fue extraído del manual del fabricante (Short Brothers plc., 1985).

Dado que la velocidad de pérdida obtenida del gráfico en la Figura 3 corresponde a la velocidad calibrada (CAS), se procede a calcular la velocidad verdadera (TAS). Es importante señalar que se asume un factor f_c igual a uno, ya que no se tienen en cuenta los efectos de compresibilidad.

$$EAS = f_c \cdot CAS = TAS \cdot \left(\frac{\rho_\infty}{\rho_{MSL}}\right)^{0,5}$$

$$TAS = V_s = 46\left[\frac{m}{s}\right]$$

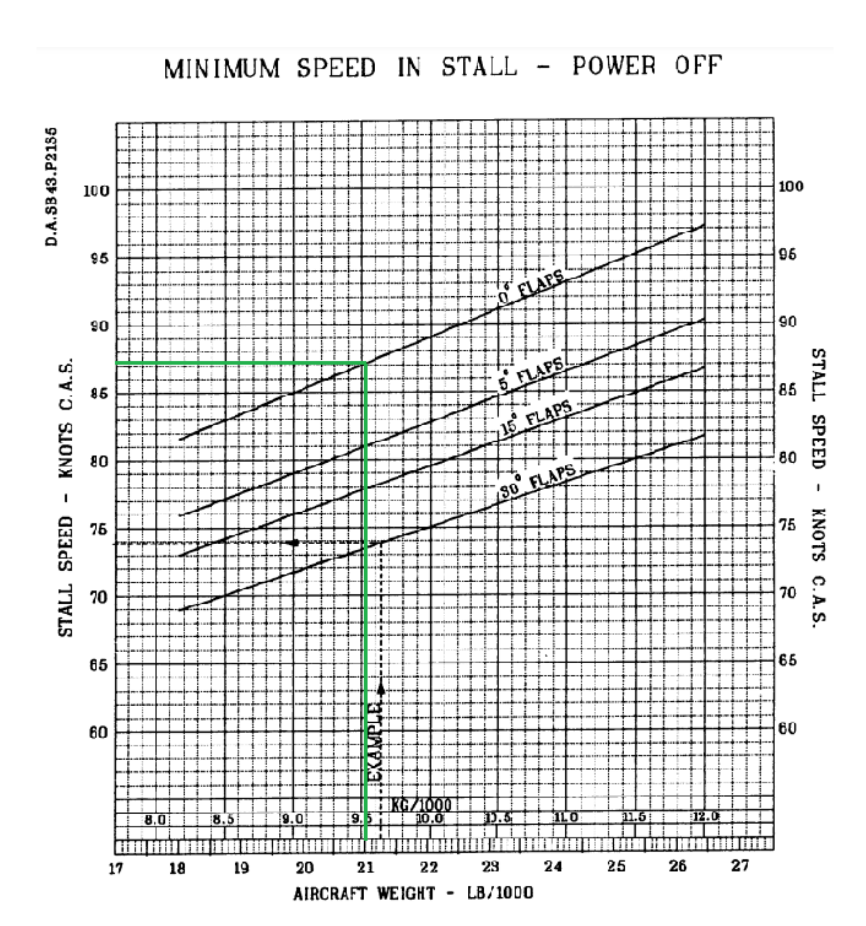


Figura 3: Gráfica Peso vs. Velocidad de pérdida

Potencia Requerida

Siguiendo las hipótesis previamente establecidas y considerando las fuerzas que actúan en una condición de vuelo recto y nivelado, podemos derivar las ecuaciones generales de movimiento para esta situación:

$$T = D$$

$$L = W$$

Dado que disponemos de una curva polar, detallada en el Apéndice en la Tabla 27, que se puede expresar de la siguiente manera:

$$C_D = C_{D_0} + AC_L + BC_L^2 \tag{1}$$

Donde los valores son los siguientes:

$$C_{D_0} = 0{,}0261$$



$$A = -0{,}0090$$

$$B = 0{,}0357$$

Podemos derivar la expresión para calcular la Potencia Requerida P_{req}, que se define como se muestra en la Expresión 2:

$$P_{req} = TV = DV = \frac{1}{2}\rho S V^3 C_D = \frac{1}{2}\rho S V^3 \left(C_{D_0} + AC_L + BC_L^2\right) \tag{2}$$

Potencia Disponible

El manual del fabricante de la aeronave y el manual del fabricante del motor (Ver Ref. (Short Brothers plc., 1985; Pratt & Whitney, 2007)) proporciona información sobre las curvas de potencia del motor a diferentes altitudes (presentadas como torque del motor). Estos datos se recopilaron numéricamente para permitir el cálculo de las potencias disponibles (P_{av}). El detalle de las curvas de potencia se encuentra en el Apéndice 6.2.

A partir de esta información, podemos derivar la expresión para la potencia en el eje del motor:

$$P_{eje} = 2 \cdot T \left(\frac{2\pi}{60} \cdot 1{,}3558 \cdot 1300\right) [\text{Watts}] \tag{3}$$

en donde el torque se define de la siguiente manera:

$$T = -0{,}0897h + 3625 \text{ [lb-ft]} \tag{4}$$

Considerando el rendimiento de la hélice, podemos calcular la Potencia Disponible P_{av} de la siguiente manera:

$$P_{av} = \eta_h \cdot P_{eje} \tag{5}$$

Eficiencia de la Hélice

La eficiencia de la hélice, la cual varía con la velocidad, se calcula numéricamente siguiendo el enfoque propuesto por Solies. La curva de eficiencia resultante se presenta en el Apéndice, en la Expresión 81, junto con una gráfica en la Figura 65 ilustrativa de los resultados del método y el ajuste numérico propuesto.

La expresión obtenida es la siguiente:

$$\eta_h = -2{,}7837 \times 10^{-9} \cdot V^4 + 1{,}0935 \times 10^{-6} \cdot V^3 - 1{,}6159 \times 10^{-4} \cdot V^2 + 1{,}1873 \times 10^{-2} \cdot V + 4{,}3272 \times 10^{-1}$$

Velocidades Mínimas y Máximas

Las velocidades mínimas y máximas se obtienen cuando la potencia requerida es igual a la potencia disponible. Matemáticamente, esto corresponde a igualar las expresiones 2 y 5. Al hacerlo, se llega a la siguiente ecuación:

$$P_{req} = A \cdot V \cdot W + \frac{2B \cdot W^2}{S \cdot V \cdot \rho} + \frac{C_{D0} \cdot S \cdot V^3 \cdot \rho}{2} = P_{av}$$

Esta ecuación es de cuarto orden y sus raíces representan las velocidades mínimas y máximas para diferentes altitudes de vuelo:

$$\frac{C_{D0} \cdot S \cdot \rho}{2} V^4 - A \cdot W \cdot V^2 - P_{av} \cdot V + \frac{2B \cdot W^2}{S \cdot \rho} = 0 \tag{6}$$

2.2.3. Resultados

2.2.3.1 Curvas de Potencia disponible Vs Potencia requerida

Una vez ajustadas las curvas de potencia en el eje y de la eficiencia de la hélice, es posible obtener las curvas de potencia disponible empleando la Expresión 5. Las curvas que describen la potencia requerida se obtienen a partir de la ecuación dada en la Expresión 2. Estas curvas, tanto la de potencia requerida como la de potencia disponible, han sido trazadas para diferentes altitudes y se presentan conjuntamente en la Figura 4.

2.2.3.2 Envolvente de Vuelo

Mediante un procedimiento numérico, se calcularon los puntos de intersección de las curvas de potencia requerida y potencia disponible de la aeronave, es decir, los puntos en los que ambas potencias son iguales y se obtienen las velocidades máximas y mínimas. Estos puntos se han recopilado y se presentan gráficamente como la envolvente de vuelo de la aeronave, que se muestra en la Figura 5.

La ecuación a resolver se encuentra dada por la Expresión 7.

$$P_{\text{req}}(v, h) - P_{\text{av}}(h) = 0 \tag{7}$$

Para llevar a cabo la resolución numérica, se utilizó la librería *scipy* y su módulo *optimize*. Se aplicó una versión modificada del método de Powell diseñada para calcular raíces múltiples (consultar *scipy.optimize.root*).

Además de la representación gráfica de la envolvente de vuelo en la Figura 5, se trazaron las velocidades de pérdida para diversas altitudes. Estos valores se obtuvieron utilizando la ecuación 8, que hace uso del coeficiente máximo de sustentación $C_{L_{\max}}$:

$$V_s = \sqrt{\frac{2W}{S C_{L_{\max}} \rho}} \tag{8}$$

Figura 4: Potencia requerida vs Potencia disponible.

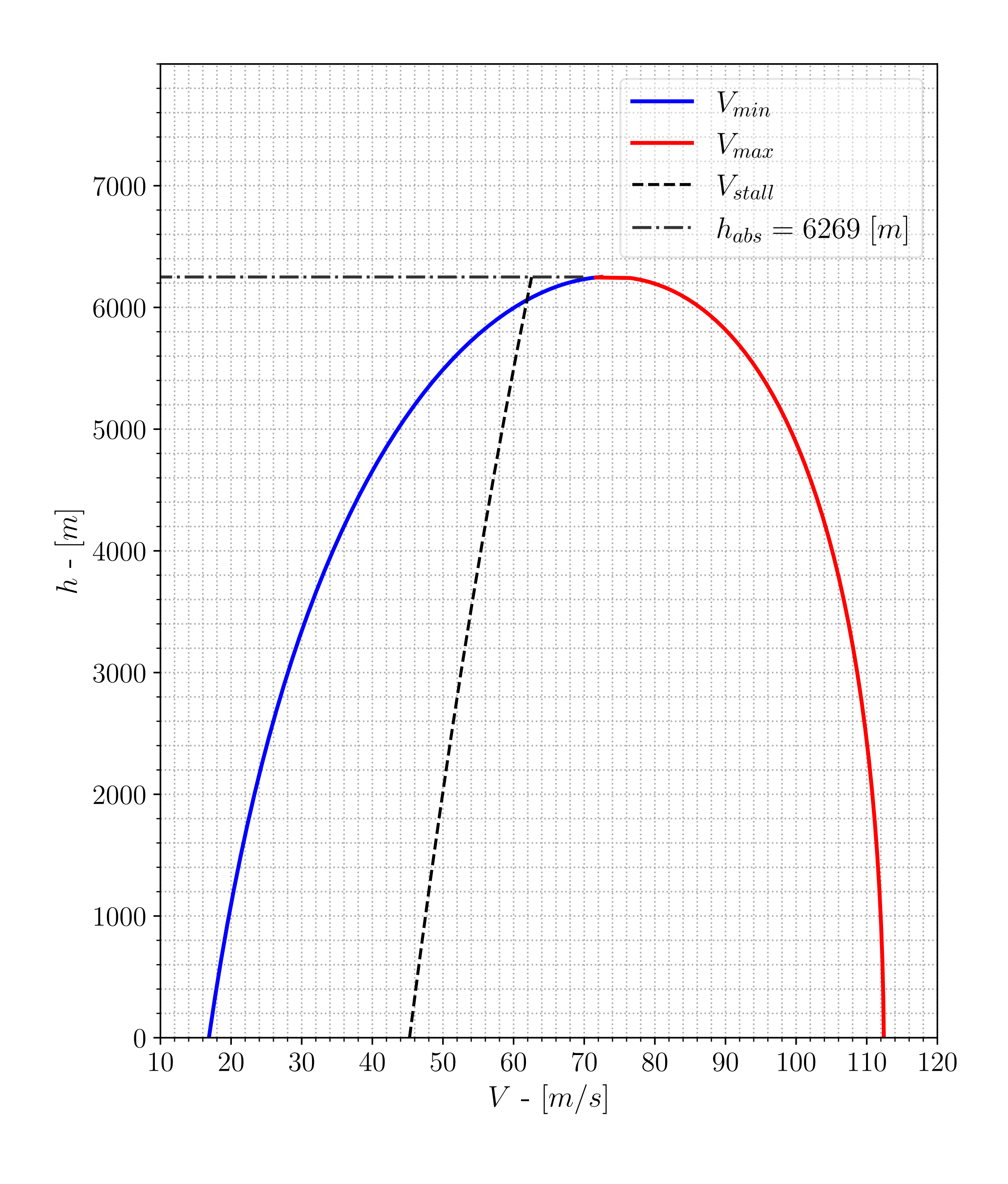


Figura 5: Envolvente de Vuelo de la Aeronave

2.2.4. Discusión

En esta sección, se han obtenido representaciones gráficas de la potencia requerida y la potencia disponible a diferentes altitudes (ver Figura 4). Estas curvas han permitido definir una envolvente de vuelo que delimita una región específica en la cual la aeronave puede mantener un vuelo recto y nivelado (ver Figura 5).

El techo absoluto calculado corresponde a una altitud de 6269 metros, en comparación con el techo absoluto de la aeronave especificado como 7010 metros (23000 pies) en (doc8643.com, 2023). Se observa una discrepancia significativa de 741 metros, que equivale a un error relativo porcentual del 10.57 %. Estas diferencias podrían atribuirse a las simplificaciones de la teoría utilizada y posiblemente a imprecisiones en el cálculo de la curva polar de resistencia.

En cuanto al rango de velocidades obtenido, los resultados son coherentes con las velocidades óptimas de vuelo presentadas en el manual de la aeronave (Short Brothers plc., 1985). En ese sentido, se considera que los resultados obtenidos son satisfactorios en términos generales.

2.3. Vuelo en trepada estacionario

2.3.1. Introducción

En esta sección, se llevará a cabo el análisis de la etapa de vuelo en trepada de la aeronave asignada a nuestro grupo, el *Short 360*. La fase de vuelo en trepada es fundamental para que la aeronave alcance su altitud de crucero y pueda cumplir su función de transporte de carga o pasajeros. Se determinarán los gráficos de la *tasa de ascenso* y el *gradiente de ascenso* a diversas altitudes de vuelo para la aeronave. Asimismo, se calculará el valor del techo de servicio de la aeronave y se superpondrán los valores de velocidad para la tasa de ascenso máxima en diferentes altitudes dentro de la envolvente de vuelo definida en la sección anterior. También se determinará el techo de servicio con un motor inoperativo. Por último, se verificará el cumplimiento de las regulaciones de aeronavegabilidad correspondientes con respecto a los requisitos de vuelo en trepada.

2.3.2. Metodología

Para el desarrollo y la determinación de lo descrito anteriormente se seguirá la metodología propuesta por la cátedra la cual se encuentra desarrollada en plenitud en la bibliografía (Roskam y Lan, 1997; Ojha, 1995). Se parte de las siguientes hipótesis:

- Vuelo en trepada siguiendo una trayectoria de vuelo aproximadamente recta y a ángulos (γ) de ascenso relativamente bajos (menores a 15°).
- Vuelo en trepada con velocidad de la aeronave constante, es decir vuelo en ascenso estacionario.

2.3.3. Resultados

2.3.3.1 Tasa de ascenso RC y gradiente de ascenso CGR

Se aplicó el procedimiento iterativo recomendado en la bibliografía (Saldía, 2023e) y por la cátedra para determinar los parámetros de ascenso específicos de la aeronave asignada. Como resultado de este proceso, se generaron las curvas correspondientes a la tasa de ascenso (RC) y al gradiente de ascenso (CGR) de la aeronave.

El valor del gradiente de ascenso, (CGR), representa la cantidad de altitud ganada por unidad de distancia horizontal recorrida por la aeronave. Posteriormente, este valor se empleó para calcular las distintas tasas de ascenso en función de la altitud. Las representaciones gráficas de estas curvas se encuentran en las Figuras 6 y 7, respectivamente.

Proceso iterativo seguido

El proceso iterativo seguido es el mencionado anteriormente y se detalla a continuación:

1. Sean la altitud h, velocidad V, peso W, superficie alar S, curva polar $C_D(C_L)$ y potencia disponible P_{av} prescritos.



2. Se empieza por proponer un gradiente de ascenso inicial $\sin(\gamma) = 0$.

3. Se obtiene el coeficiente de sustentación correspondiente de:

$$C_L = \frac{W \cos(\gamma)}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}$$

4. De la curva polar se obtiene el coeficiente de resistencia correspondiente a ese C_L.

5. Se obtiene la potencia requerida para la resistencia aerodinámica en la trepada de la forma:

$$P_{req} = DV = \frac{1}{2}\rho V^3 S C_D$$

6. Se obtiene entonces un nuevo gradiente de ascenso de la forma:

$$\sin(\gamma) = \frac{(P_{av} - P_{req})}{WV}$$

   Se reemplaza luego este nuevo valor en el paso 3 y se repite hasta la convergencia.

7. Una vez obtenido el gradiente de ascenso se obtiene la tasa de ascenso con la ecuación:

$$RC = V \sin(\gamma)$$



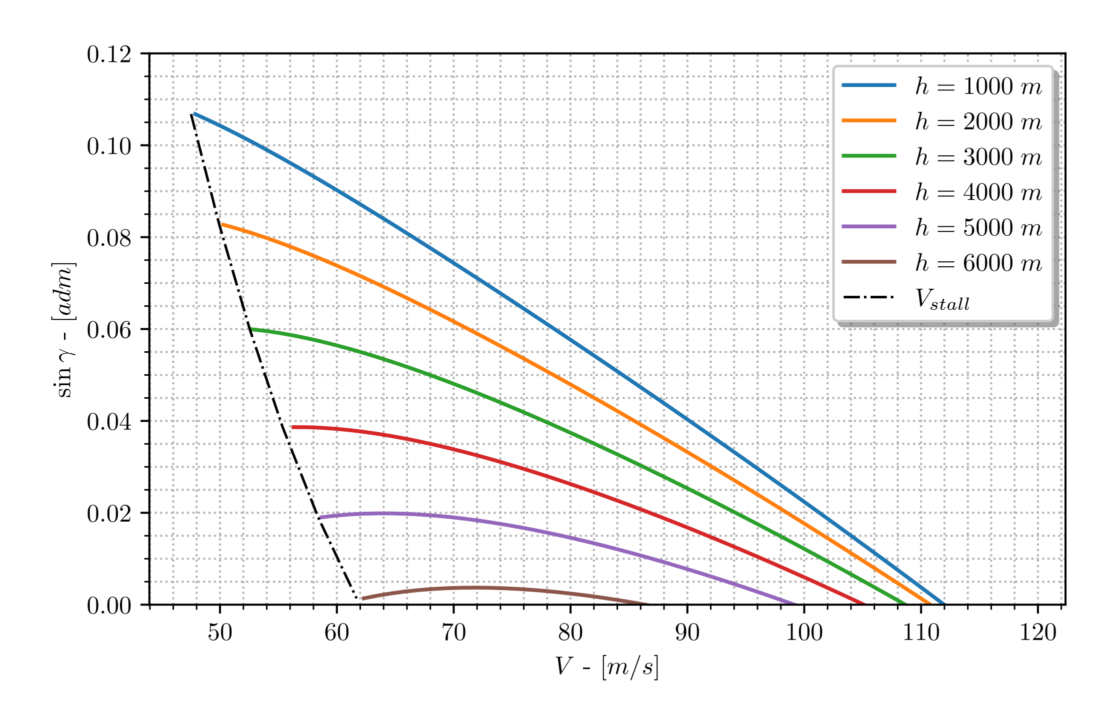


Figura 6: Gradiente de ascenso para distintas altitudes

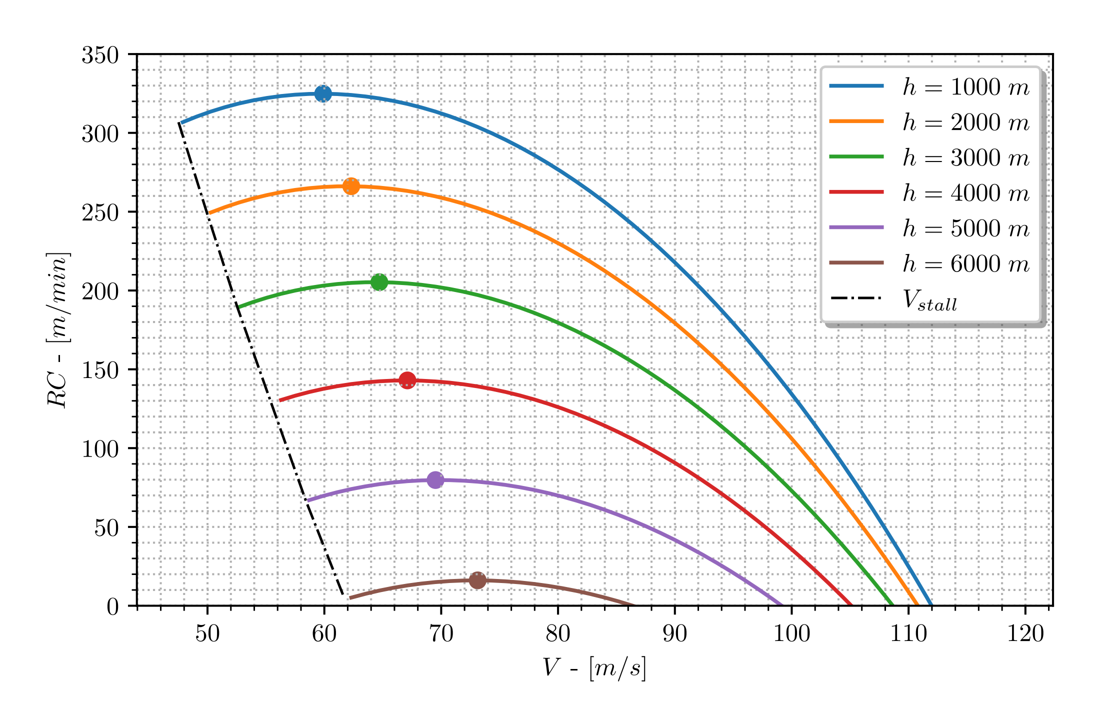


Figura 7: Tasa de ascenso para distintas altitudes

2.3.3.2 Obtención del techo de servicio de la aeronave

Utilizando los valores de tasa de ascenso obtenidos y representados en la Figura 7, empleamos Python para calcular los valores de RC_{max} en diferentes altitudes de vuelo. El proceso iterativo proporcionó soluciones discretas para *CGR* y *RC*, y estos valores se almacenaron en vectores o listas. A continuación, se utilizaron funciones integradas de Python, como *max()*, para determinar los RC_{max} correspondientes a cada conjunto de datos de altitud (consulte Built-in Functions).

Con los valores de RC_{max} en mano, se generó el gráfico que se muestra en la Figura 8.

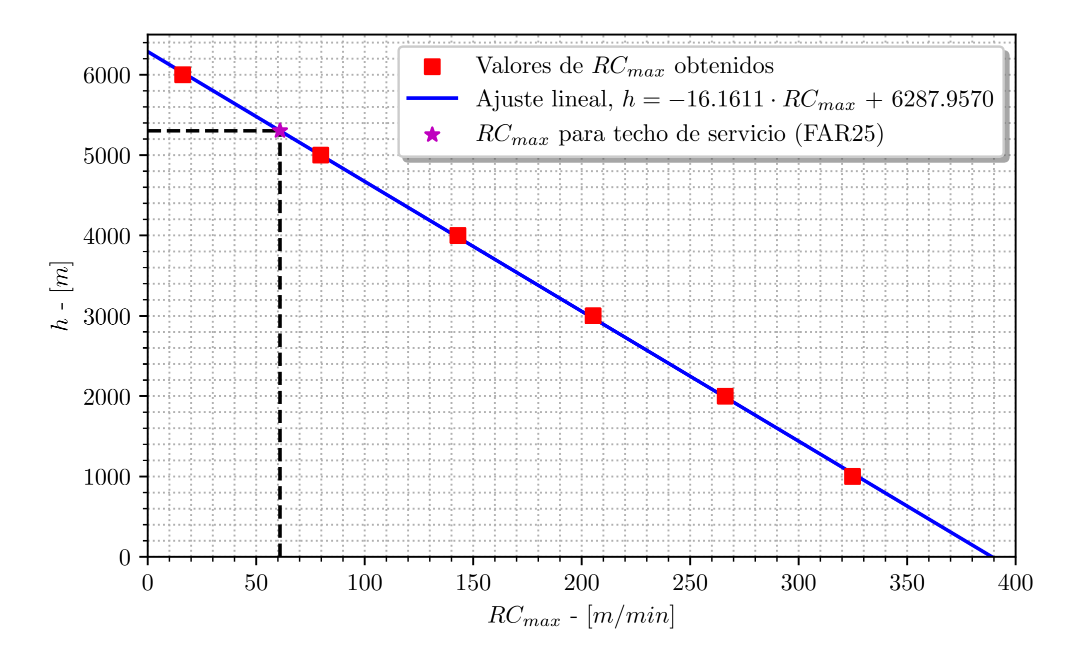


Figura 8: Tasas de ascenso máximas

Luego, se realizó un ajuste lineal a los puntos obtenidos, que se muestra en la Expresión 9. Siguiendo las normativas aplicables a la aeronave en análisis (FAR 25), se determinó que el techo de servicio se alcanza a una tasa de ascenso de RC_{max} = 200 [ft/min] ≡ 60,96 [m/min], y su valor se describe en la Expresión 10. Del mismo modo, para una tasa de ascenso de RC_{max} = 0 [m/min], se obtiene el techo absoluto, cuyo valor se presenta en la Expresión 11.

$$h = -16{,}1611 \cdot RC_{max} + 6287{,}9570 \tag{9}$$

$$h_{serv} = 5302{,}7776 \text{ [m]} = 5303 \text{ [m]} \tag{10}$$

$$h_{abs} = 6287{,}9570 \text{ [m]} = 6288 \text{ [m]} \tag{11}$$



2.3.3.3 Obtención del techo de servicio OEI

Se realiza de forma similar a lo que se detalló en la sección anterior pero en este caso se tuvo en cuenta la mitad de la potencia disponible. Obtenidos los valores de RC_{max} se generó el gráfico que se muestra en la Figura 9.

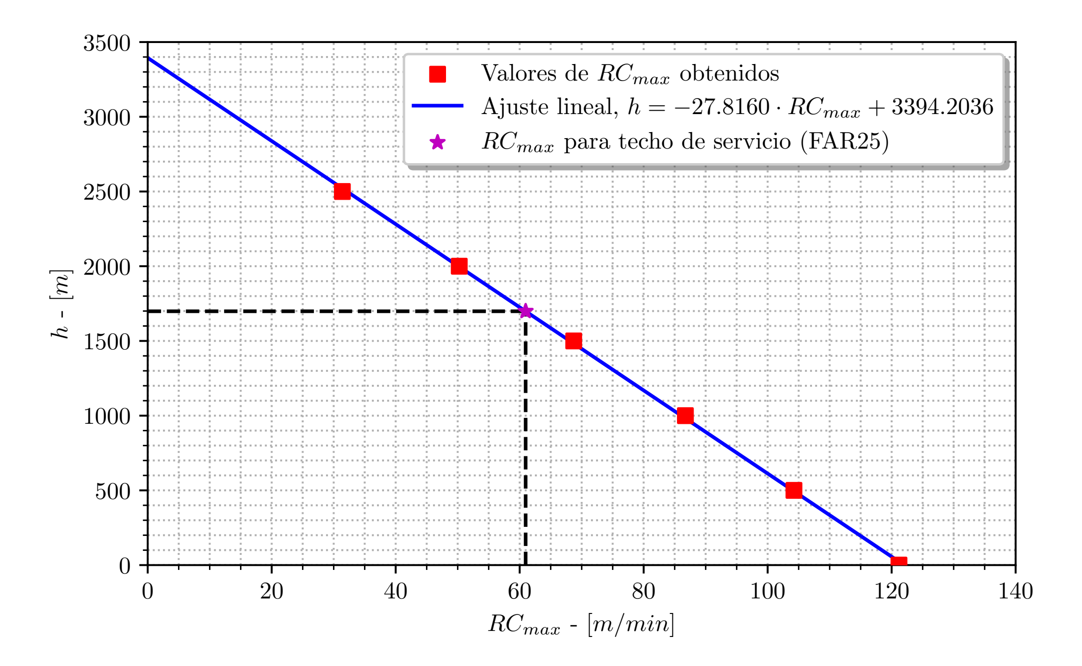


Figura 9: Tasas de ascenso máximas - OEI

Luego, se realizó un ajuste lineal a los puntos obtenidos, que se muestra en la Expresión 12. Siguiendo las normativas aplicables a la aeronave en análisis (FAR 25), se determinó que el techo de servicio se alcanza a una tasa de ascenso de $RC_{max} = 200$ [ft/min] ≡ 60,96 [m/min], y su valor se describe en la Expresión 13. Del mismo modo, para una tasa de ascenso de $RC_{max} = 0$ [m/min], se obtiene el techo absoluto, cuyo valor se presenta en la Expresión 14.

$$h = -27{,}8160 \cdot RC_{max} + 3394{,}2036 \tag{12}$$

$$h_{serv_{OEI}} = 1698{,}5392 \text{ [m]} = 1699 \text{ [m]} \tag{13}$$

$$h_{abs_{OEI}} = 3394{,}2036 \text{ [m]} = 3394 \text{ [m]} \tag{14}$$



2.3.4. Discusión

En esta sección, se han calculado y representado gráficamente las tasas de ascenso y los gradientes de ascenso para diversas altitudes de vuelo. Las Figuras 7 y 6 muestran estas representaciones respectivamente.

Luego, utilizando un método que implica ajustes lineales junto con extrapolaciones simples, se determinaron el techo de servicio y el techo absoluto de la aeronave. Para este análisis, se consideró una tasa de ascenso máxima de referencia de 200 ft/min, que es un estándar para aeronaves certificadas bajo la norma FAR 25. Los resultados obtenidos fueron los siguientes: el techo de servicio se estimó en 5303 m, mientras que el techo absoluto, que corresponde a una tasa de ascenso nula, fue de 6288 m.

Adicionalmente, se realizaron los mismos cálculos para la condición de un motor inoperativo (OEI, por sus siglas en inglés), considerando la mitad de la potencia disponible. Los resultados obtenidos en esta situación fueron los siguientes: el techo de servicio con un motor inoperativo se estimó en 1699 m, y el techo absoluto con un motor inoperativo se calculó en 3394 m.

En relación a las regulaciones de aeronavegabilidad vigentes, se ha clasificado esta aeronave en función de sus características dentro de los parámetros establecidos por el *FAR 25*, considerando su naturaleza como aeronave de transporte. Específicamente en lo que respecta a su desempeño de ascenso, se establece que el gradiente de ascenso (*CGR*) para una aeronave bimotora en fase de trepada en configuración limpia (es decir, con los *flaps* retraídos y el tren de aterrizaje en posición recogida y asegurada) no debe ser inferior a 0.012, según lo estipulado en la referencia (25.121, 2014). Los resultados obtenidos se ajustan satisfactoriamente a estos requisitos normativos, lo que indica que la aeronave cumple con los estándares establecidos.

Finalmente, se incorporaron estos resultados en la envolvente de vuelo de la aeronave, como se muestra en la Figura 10.

Figura 10: Superposición de los resultados obtenidos en la envolvente de vuelo de la aeronave

2.4. Vuelo en maniobra

2.4.1. Introducción

En esta sección, se procede a detallar el desempeño de la aeronave *Short 360* en maniobras de giro coordinado. Se entiende por maniobra una operación que implica al menos una rotación y cambio de dirección. Estas rotaciones se logran mediante la deflexión de las superficies de control de la aeronave, como los alerones (para el rolido), el estabilizador horizontal (para el cabeceo) y el timón de dirección (para la guiñada).

La condición de vuelo asociada a un *giro coordinado* se define como aquella en la cual la aeronave tiene un ángulo de inclinación ϕ con respecto a la línea del horizonte, y su trayectoria de vuelo sigue una órbita circular con un radio de giro R_t en el plano horizontal.

A continuación, se detalla el procedimiento para calcular diversos parámetros relevantes en la performance del giro coordinado, como el *radio de giro*, *la velocidad de giro* y el *factor de carga*.

2.4.2. Metodología

Para el desarrollo del cálculo se siguió la metodología presentada por la cátedra, la cual se desarrolla en plenitud en la bibliografía recomendada (Roskam y Lan, 1997; Saldía, 2023d).

2.4.2.1 Factor de carga máximo en giro coordinado

El factor de carga máximo en esta condición de vuelo se expresará en función de la velocidad, que se encuentra en el rango de velocidades desde la velocidad de pérdida hasta la velocidad máxima para vuelo recto y nivelado. Además, este factor de carga también variará según la altitud en la que se encuentre la aeronave.

Es importante señalar que el factor de carga se encuentra limitado por diversos aspectos, que incluyen consideraciones aerodinámicas, la potencia disponible y la resistencia estructural. Por lo tanto, se procederá a determinar el factor de carga máximo en función de cada una de estas limitaciones.

El factor de carga máximo limitado por consideraciones aerodinámicas, denotado como $n_{max,(C_{L_{max}})}$, se calcula según la Expresión 15, que representa la relación entre el coeficiente de sustentación máximo de la aeronave $C_{L_{max}}$ y el coeficiente de sustentación de la aeronave en vuelo recto y nivelado a la velocidad seleccionada $C_{L,level}$.

$$n_{max,C_{Lmax}} = \frac{C_{Lmax}}{C_{L,level}} \tag{15}$$

El factor de carga máximo limitado por la potencia disponible se calcula mediante la Expresión 16:

$$n_{max,P_{av}} = \frac{C_{L,P_{av}}}{C_{L,level}} \tag{16}$$

Donde $C_{L,P_{av}}$ se determina a partir de la curva polar, previamente hallando el coeficiente de resistencia máximo $C_{D_{max}}$ con la Expresión 17:

$$C_{D_{max},P_{av}} = \frac{P_{av}}{\frac{1}{2}\rho V^3 S} \tag{17}$$

Finalmente, el factor de carga máximo n_{max} se obtiene como el valor mínimo entre los factores de carga limitados por la potencia disponible, la resistencia estructural y la aerodinámica:

$$n_{max} = \text{mín}\left(n_{max,C_{L_{max}}}, n_{max,P_{av}}, n_{max,str}\right)$$

en donde el factor de carga estructural $n_{max,str}$ tiene un valor de $n_{max,str} = 2{,}758$, el mismo se encuentra dado en el manual del fabricante y también en el certificado tipo de la aeronave (Short Brothers plc., 1985; EASA, 2019).

2.4.2.2 Radio de giro

Una vez encontrado el factor de carga máximo, se procede a calcular el radio de giro R_t para la altura a la que se encuentra la aeronave en función de su velocidad empleando la siguiente expresión:

$$R_t = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

2.4.2.3 Velocidad de giro

Obtenido el radio de giro, es posible calcular la velocidad de giro o velocidad angular de guiñada $\dot{\psi}$ mediante la siguiente relación cinemática:

$$\dot{\psi} = \frac{V}{R_t} = \frac{g \cdot \sqrt{n^2 - 1}}{V}$$



2.4.3. Resultados

Utilizando la metodología detallada previamente, se ha calculado el valor del factor de carga máximo (n_{max}) en el rango de velocidades comprendido entre la velocidad de pérdida y la velocidad máxima de la aeronave para diversas altitudes. Es importante destacar que para velocidades fuera de este rango, el factor de carga será inferior a la unidad, lo que impide el cálculo del radio de giro y la velocidad de giro.

Una vez obtenidos los valores del factor de carga, se procedió a calcular y graficar el radio de giro en el mencionado rango de velocidades para distintas altitudes. Los resultados se presentan en la Figura 11. Asimismo, se realizó el cálculo y la representación gráfica de las velocidades de giro en el mismo rango y a diferentes altitudes, lo que dio lugar a la Figura 12.

Se generaron gráficos del factor de carga correspondiente a la condición de vuelo en crucero en el rango de velocidades, destacando cada una de sus limitaciones: aerodinámicas, de potencia y de resistencia estructural. Este gráfico se presenta en la Figura 13.

Finalmente, en las Figuras 14 y 15, se muestran las curvas que representan el radio de giro mínimo y la velocidad de giro máxima en función de la altitud de vuelo, respectivamente.

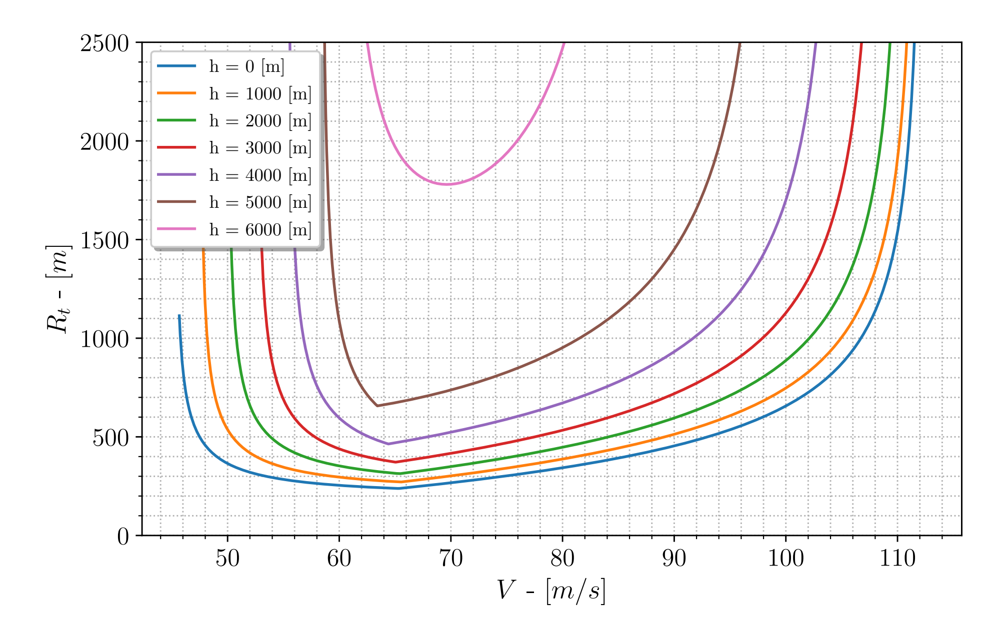


Figura 11: Radios de giro para distintas altitudes

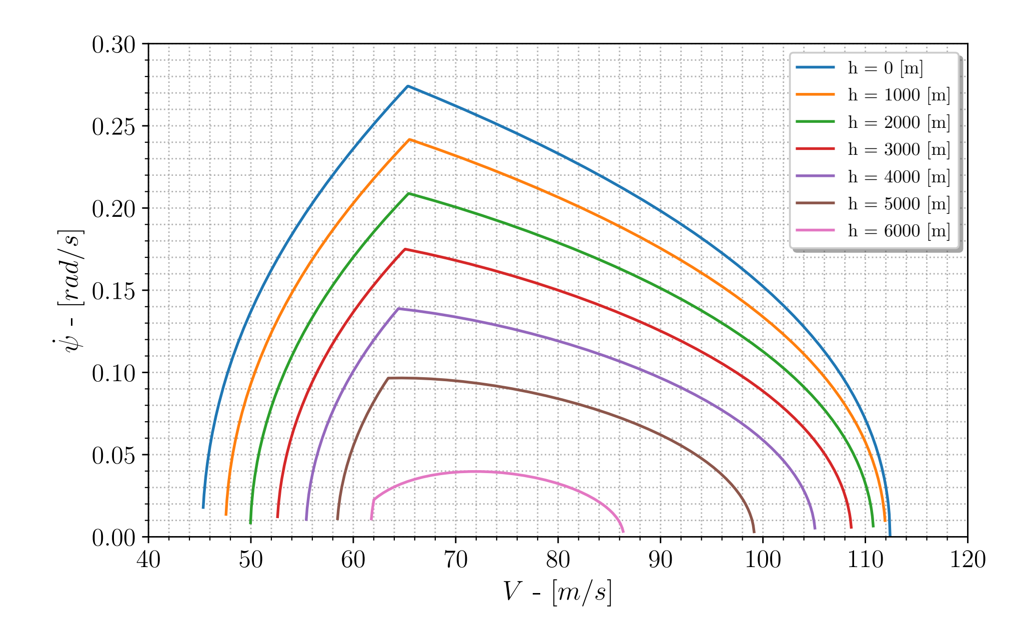


Figura 12: Velocidades de giro para distintas altitudes

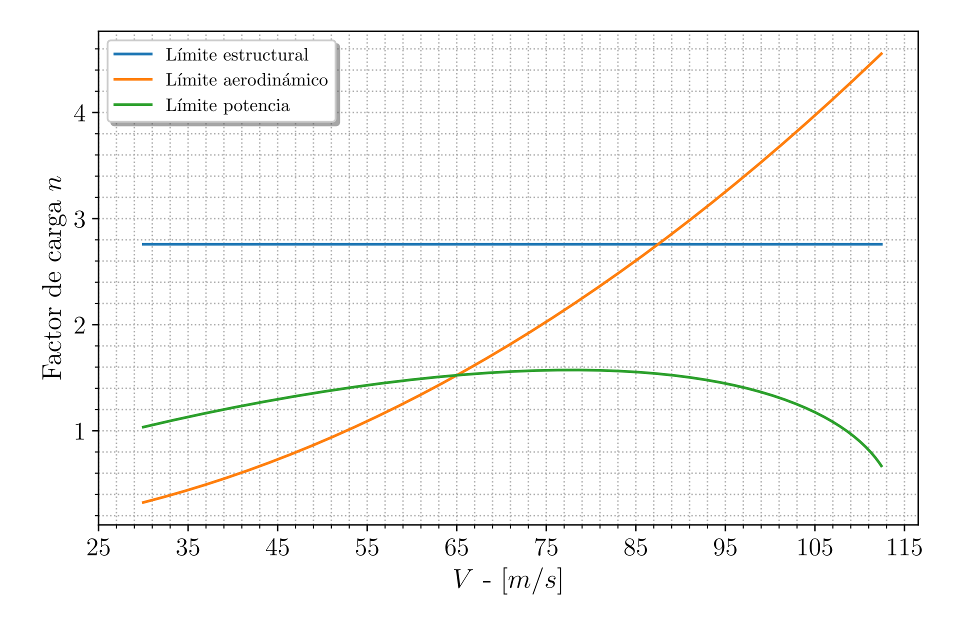


Figura 13: Limitaciones de factor de carga para la condición en vuelo crucero



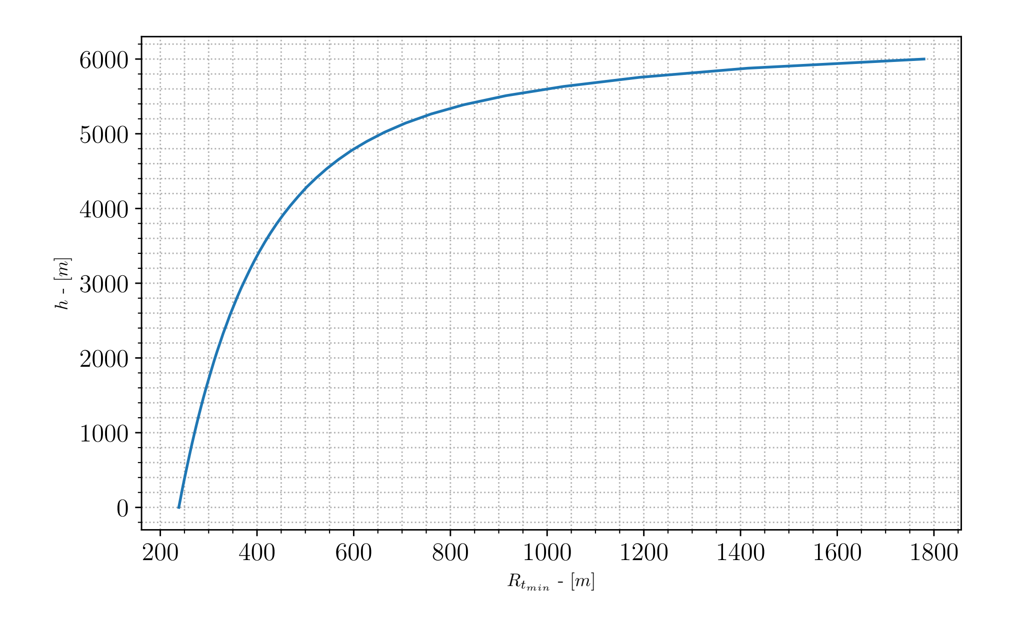


Figura 14: Radio de giro mínimo para la aeronave Short 360

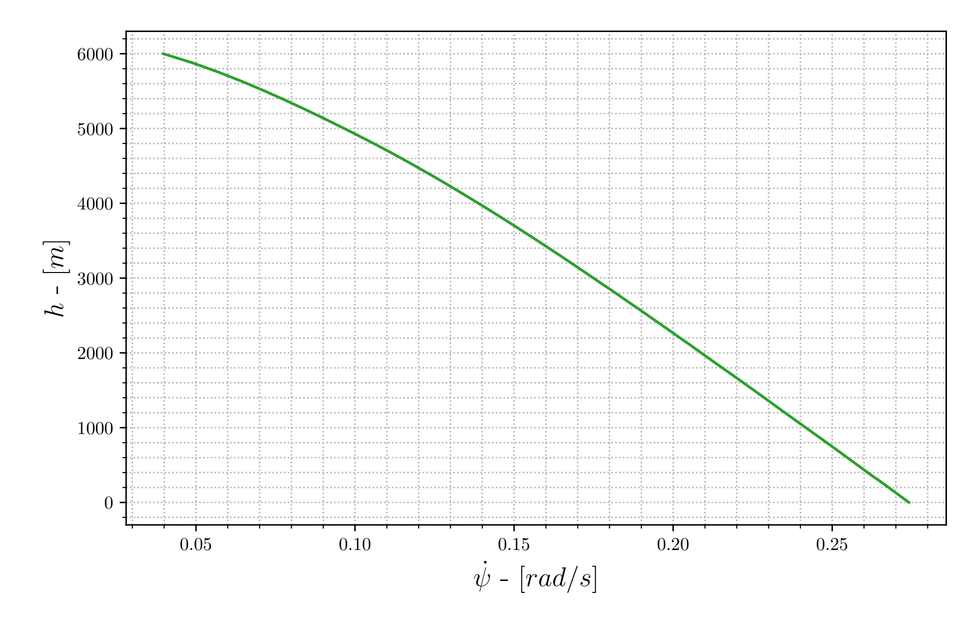


Figura 15: Velocidades de giro máximas para la aeronave Short 360

2.4.4. Discusión

En esta sección, se llevaron a cabo los cálculos de los factores de carga correspondientes a las diferentes limitaciones de la aeronave. Es importante destacar que para este tipo de avión, el factor de carga estructural está limitado a $n = 2{,}758$. Por lo tanto, los resultados obtenidos indican que las limitaciones por factor de carga provienen exclusivamente de la aerodinámica y la potencia disponible en la planta propulsora.

Una vez calculados los factores de carga para diversas altitudes, se generaron las gráficas presentadas en las Figuras 11 y 12. Estas representaciones gráficas muestran la variación de los radios y las velocidades de giro en función de la velocidad de vuelo, manteniendo una altitud constante. Además, las curvas se componen claramente de dos ramas: una relacionada con la limitación aerodinámica y otra asociada a la potencia disponible.

Los gráficos de las Figuras 14 y 15 proporcionaron información sobre la evolución del radio de giro mínimo ($R_{t_{min}}$) y la velocidad de giro máxima ($\dot{\psi}_{max}$) en función de la altitud de vuelo. Los resultados observados fueron coherentes, ya que a medida que la altitud aumentó, se registró un incremento en el valor de $R_{t_{min}}$ y una disminución en la velocidad de giro máxima $\dot{\psi}_{max}$. Este comportamiento es característico en aeronaves, ya que a altitudes más elevadas, las limitaciones aerodinámicas en los factores de carga se vuelven más restrictivas. En consecuencia, para realizar giros coordinados a estas altitudes, la aeronave requerirá un radio de giro más amplio y, por ende, deberá ejecutar esta maniobra a una velocidad menor.



2.5. Alcance y autonomía

2.5.1. Introducción

En esta sección, se abordará el análisis de la capacidad de alcance y autonomía de la aeronave asignada, el *Short 360*. Para ello, se considerará una variación en el peso de la aeronave, que estará directamente relacionada con las fluctuaciones en el consumo de combustible.

El objetivo principal de esta sección es determinar el consumo de combustible de la aeronave en diferentes condiciones, incluyendo la fase de trepada, el comportamiento durante el vuelo en crucero a una altitud y velocidad constantes, y finalmente, la creación de un diagrama de carga paga vs. alcance que represente los resultados obtenidos.

2.5.2. Metodología

Para llevar a cabo el cálculo, hemos seguido la metodología establecida por la cátedra, la cual se encuentra detallada en su totalidad en la bibliografía recomendada (Roskam y Lan, 1997). En esta fase, abordaremos nuevamente el equilibrio en las ecuaciones de movimiento, pero ahora incorporaremos la variación de peso debida al consumo de combustible.

2.5.2.1 Datos

Los datos utilizados para la obtención del alcance y de la autonomía son los que se muestran en la Tabla 3. [1]

Tabla 3: Datos

Datos iniciales			
Parámetro	*Símbolo*	*Valor*	*Unidad*
Peso máximo al despegue	W_{MTOW}	11657	kg
Peso en vacío operacional	W_{vacio}	7480	kg
Carga paga máxima	$W_{CP_{max}}$	3102	kg
Carga de combustible máxima	$W_{com,max}$	1742	kg
Reserva de 45 minutos IFR	$W_{45\,min}$	281	kg
Velocidad crucero	$V_{crucero}$	100	m/s
Altitud de crucero	$h_{crucero}$	3050	m
Densidad a la altitud de crucero	$\rho_{crucero}$	0.9044	kg/m^3
Consumo específico	c_p	1.17E-06	$N/w/s$

[1] El consumo específico en crucero fue estimado en el Apéndice 6.4

2.5.3. Resultados

2.5.3.1 Combustible consumido en la trepada

Para determinar el consumo de combustible durante la fase de trepada, se empleó un método iterativo recomendado por la cátedra, el cual se encuentra descrito en mayor detalle en la bibliografía (Saldía, 2023b).

En las condiciones de trepada, se estableció un ascenso desde el nivel del mar hasta la altitud de crucero de 3050 $[m]$ (un valor dentro de la envolvente de vuelo). Se consideraron tanto trepadas con la aeronave en su peso máximo al despegue (W_{MTOW}) como el escenario en el que la aeronave trepa sin carga paga y con la máxima cantidad de combustible disponible. Para determinar el consumo de combustible durante la trepada, se resolvió la siguiente integral:

$$W_{f,climb} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\dot{W}_{f,climb}}{RC} dh$$

en donde $RC = \dfrac{dh}{dt}$ es la tasa de ascenso y $\dot{W}_{f,climb}$ es el flujo de combustible.

Se obtuvo una altura intermedia entre las alturas inicial al nivel del mar y la de crucero que son $h_1 = 0\ m$ y $h_{crucero} = 3050\ m$ respectivamente, esto es:

$$h_{1-2} = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

Se realizó lo mismo para obtener un peso intermedio, partiendo desde el W_{MTOW} a partir de la siguiente expresión:

$$W_{1-2} = W_{MTOW} - \frac{W^i_{f,climb}}{2}$$

Luego se obtuvo la tasa de ascenso RC para la condición del peso W_{1-2} y altura h_{1-2} y velocidad de trepada $v_{trep} = 77\ [m/s]$ constante.

Se obtiene entonces el flujo de combustible de la siguiente expresión, hasta que se logró la convergencia:

$$W^{i+1}_{f,climb} = (h_1 - h_2)\left(\frac{W^i_{f,climb}}{RC^i}\right)_{1-2}$$

Se obtuvieron los siguientes resultados:

- Para el caso de trepada con la aeronave trepando con W_{MTOW} se obtuvo:

$$\boxed{W_{trepada} = 68{,}51\ [kg]}$$

- Para el caso de trepada con la aeronave trepando sin carga paga y con máximo combustible, se realizó lo mismo, pero en vez del peso W_{MTOW} se utilizó $W_{vacio} + W_{F_{max}}$ y se obtuvo:

$$\boxed{W_{trepada_B} = 43{,}50\ [kg]}$$

2.5.3.2 Pesos al inicio y final de crucero en cada condición

Los pesos al inicio y final del crucero en cada condición son los siguientes:

- En el caso de la condición de **carga paga máxima mas combustible**, el peso al inicio del crucero se calcula de la siguiente manera. En primer lugar, se determina el peso del combustible para esta condición siguiendo:

$$W_{comb_A} = W_{MTOW} - W_{CP_{max}} - W_{vacio} = 1075\ [kg]$$

  Por lo tanto el peso al inicio y al final del crucero para ésta condición se obtienen de:

$$W_1 = W_{vacio} + W_{CP_{max}} + W_{comb_A} - W_{trepada} = 11588\ [kg]$$
$$W_2 = W_1 - W_{comb_A} + W_{45\,min} = 10862\ [kg]$$

- Para la condición de **máximo combustible mas carga paga**, se obtiene primero el peso de la carga paga:

$$W_{CP_B} = W_{MTOW} - W_{com,max} - W_{vacio} = 2435\ [kg]$$

  Por lo tanto el peso al inicio y al final del crucero para ésta condición se obtienen de:

$$W_1 = W_{vacio} + W_{com,max} + W_{CP_B} - W_{trepada} = 11588\ [kg]$$

$$W_2 = W_{vacio} + W_{CP_B} + W_{45\,min} = 10195\ [kg]$$

- Para la condición de **máximo combustible sin carga paga**, el peso al inicio y al final del crucero es:

$$W_1 = W_{vacio} + W_{com,max} - W_{trepada_B} = 9179\ [kg]$$
$$W_2 = W_{vacio} + W_{45\,min} = 7761\ [kg]$$

2.5.3.3 Confección del diagrama de carga paga vs alcance

Para determinarlo, se realizaron cálculos de alcance en diversas condiciones de crucero, manteniendo una altitud y velocidad constantes ($h - V$, a una altitud de 3050 $[m]$ y una velocidad de 100 $[m/s]$). En todos los casos, se consideró una reserva de combustible equivalente a 45 minutos de vuelo adicionales (Considerando que la aeronave realiza sus vuelos de forma IFR (91.167, 2000)).

El alcance y la autonomía se obtuvieron mediante la resolución de las siguientes integrales respectivas:

$$R = -\int_{W_1}^{W_2} \frac{\eta_p\, C_L}{c_p\, C_D\, W} dW\ [m] \qquad E = -\int_{W_1}^{W_2} \frac{\eta_p\, C_L}{c_p\, V\, C_D\, W} dW\ [seg.]$$

Los resultados obtenidos se listan a continuación:



- Para la condición de **carga paga máxima más combustible**

  ▸ $R_{h-V} = 385{,}83\ [km]$ y $E_{h-V} = 1{,}07\ [h]$

- Para la condición de **máximo combustible más carga paga**

  ▸ $R_{h-V} = 1353{,}00\ [km]$ y $E_{h-V} = 3{,}76\ [h]$

- Para la condición de **máximo combustible sin carga paga**

  ▸ $R_{h-V} = 1562{,}57\ [km]$ y $E_{h-V} = 4{,}34\ [h]$

Finalmente el diagrama de carga paga Vs. Alcance se muestra en la Figura 16.

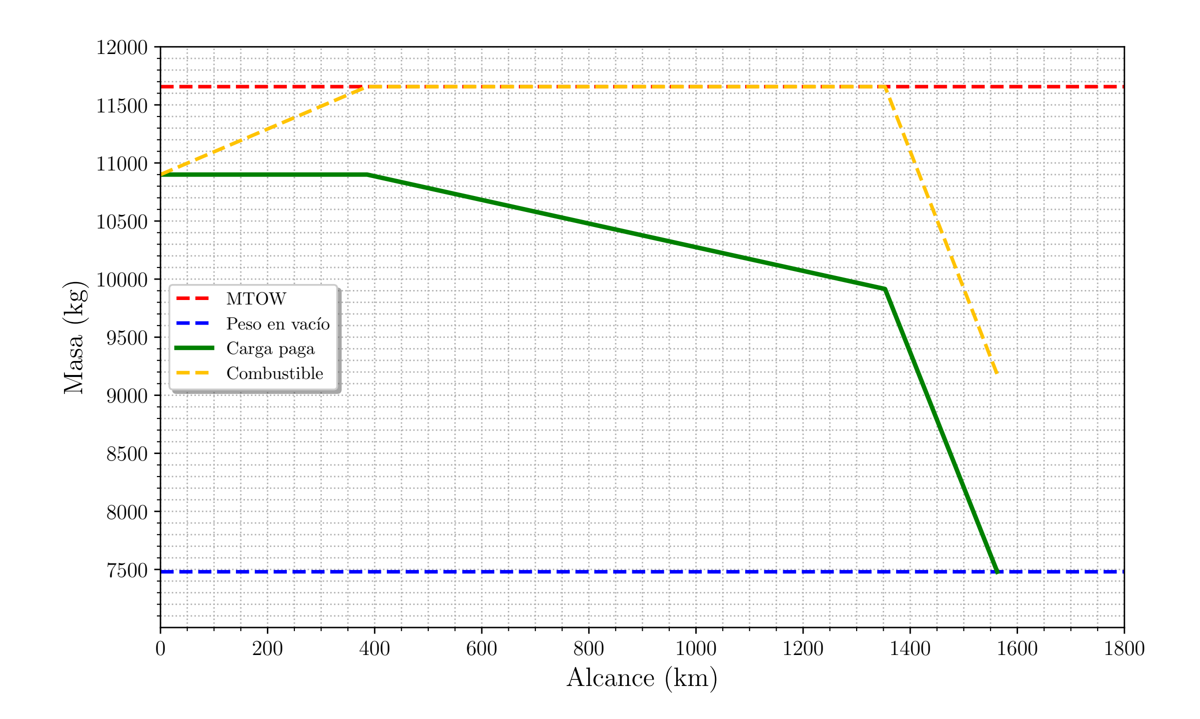


Figura 16: Diagrama de Carga paga vs Alcance para la Aeronave Short 360



2.5.4. Discusión

En esta sección, se llevaron a cabo cálculos para determinar la capacidad de alcance y autonomía de la aeronave asignada. Inicialmente, se calculó el consumo de combustible durante la fase de trepada utilizando el método iterativo recomendado por la cátedra, en dos condiciones diferentes. La primera considera la aeronave en su peso máximo al despegue, lo que resultó en un valor de $W_{trepada_A}$ = 68,51 kg, y la segunda considera la capacidad máxima de combustible sin carga paga, obteniendo $W_{trepada_B}$ = 43,50 kg.

Luego, se calcularon los pesos al inicio y al final del crucero para cada una de estas condiciones: carga máxima de combustible más carga paga, máxima capacidad de carga paga más combustible y máxima capacidad de combustible sin carga paga. Estos cálculos se realizaron manteniendo la aeronave a una altitud y velocidad constantes (3050 m y 100 m/s).

Posteriormente, se generó el gráfico de carga paga versus alcance, que se muestra en la Figura 16. Se consideró una reserva de combustible para 45 minutos de vuelo, considerando que la aeronave realiza su vuelo utilizando las reglas de vuelo instrumentales (IFR) (Ver (91.167, 2000)).

Además, se calcularon las autonomías para cada una de estas condiciones, obteniendo los siguientes resultados: 1,07 horas de vuelo para la condición de carga paga máxima más combustible, 3,76 horas de vuelo para la condición de máxima capacidad de combustible más carga paga y 4,34 horas de vuelo para la máxima capacidad de combustible sin carga paga.

Se compararon los resultados obtenidos con los datos proporcionados en la publicación de *Jane's All the World's Aircraft* (ver (Taylor, 1981)). Según esta fuente, la aeronave tiene un alcance de 425 $[km]$ al volar a una altitud de crucero de 3050 $[m]$ (10000 $[ft]$) a una velocidad de 200 nudos (103 $[m/s]$) con carga paga máxima mas combustible. En nuestro cálculo dicha condición de crucero arrojo un resultado de 386 $[km]$, los resultados obtenidos son próximos a los que comenta la publicación, si bien hay diferencias podemos considerar que son dentro de todo aceptables.

2.6. Despegue y aterrizaje

2.6.1. Introducción

En esta sección, analizaremos el rendimiento de *despegue* y *aterrizaje* de la aeronave asignada a nuestro grupo, el *Short 360*. El objetivo principal de esta parte del estudio es determinar la *longitud total* necesaria para el despegue y aterrizaje de la aeronave bajo condiciones específicas de peso, altitud y temperatura en la pista de despegue.

Este análisis es esencial para garantizar un desempeño seguro y eficiente de la aeronave. Además, es crucial cumplir con las regulaciones de seguridad aérea vigentes, ya que esta información influye en las limitaciones de operación de la aeronave en distintos aeropuertos.

2.6.2. Metodología

La condición de *despegue y aterrizaje* constituye un caso particular dentro del ámbito de las ecuaciones de movimiento, ya que implica un vuelo con aceleración. En este contexto, se considerará la configuración de flaps deflectados y se utilizará la curva polar de baja velocidad, además de asumir que no hay viento.

El cálculo se basa en la metodología proporcionada por la cátedra y se encuentra detallado de manera exhaustiva en la bibliografía recomendada (Roskam y Lan, 1997).

Para el caso que abordaremos a continuación, se han tomado las condiciones correspondientes al *Aeropuerto Córdoba / Ing. Aer. Ambrosio Taravella* (CBA - SACO - COR), el cual se encuentra a una elevación de 489 metros sobre el nivel del mar y se considera un ángulo de inclinación de pista nulo ($\phi = 0$).

2.6.2.1 Distancia de despegue

Para obtener la distancia total de despegue se fueron calculando las distancias de cada etapa que comprende el mismo, cómo se presenta en la Figura 17.

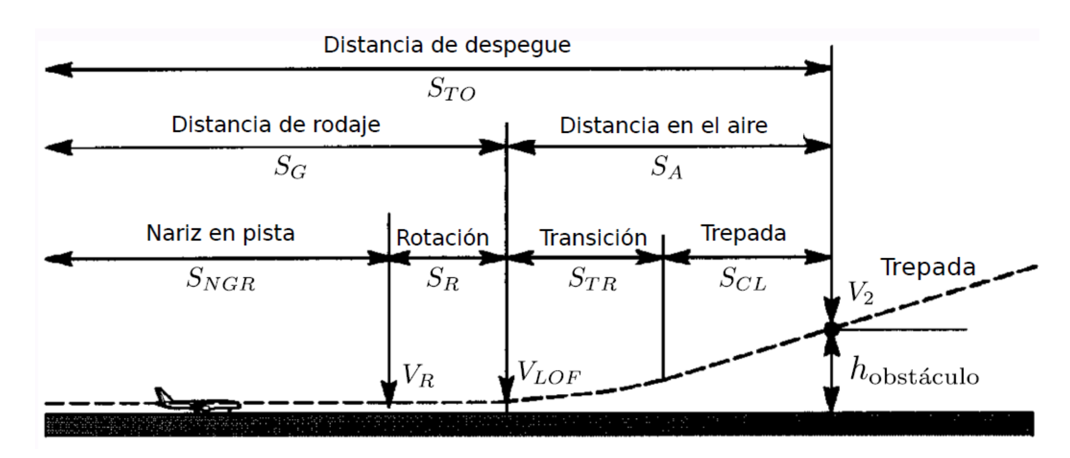


Figura 17: Fases de despegue

Dónde el cálculo de cada etapa se detalla a continuación:

- Distancia de Nariz en pista S_{NGR}:
  Para obtener ésta distancia se resolvió la siguiente integral:

$$S_{NGR} = \int_0^{V_R} \frac{V}{\frac{g}{W}\left\{T - D_g - \mu_g\left(W - L_g\right)\right\}} dV$$

  Donde el valor del coeficiente de sustentación teniendo en cuenta el efecto suelo, se obtuvo de la siguiente expresión obtenida de (Lesher, 1940):

$$C_{L_g} = \frac{1}{2}\pi\, A\, \mu_g$$

- Distancia de rotación S_R:
  Se obtiene de resolver la siguiente ecuación, considerando un tiempo de rotación $t_R = 3\ seg$ ya que es un avión de transporte:

$$S_R = \frac{1}{2}\left(V_R + V_{LOF}\right) t_R$$

- Distancia de transición S_{TR}:
  Para obtener ésta distancia se calcularon primeramente los parámetros que intervienen, los mismos son:

  Coeficiente de sustentación adicional:

$$\Delta C_L = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{V_{LOF}}{V_S}\right)^2 - 1\right\}\left[C_{L_{max}}\left\{\left(\frac{V_S}{V_{LOF}}\right)^2 - 0{,}53\right\} + 0{,}38\right]$$

  Radio de trayectoria de la etapa de transición:

$$R_{TR} = \frac{2W/S}{\rho g \Delta C_L}$$

  Obtención del ángulo de trayectoria:

$$sin\left(\gamma_c\right) = \frac{T - D}{W}$$

  Finalmente:

$$S_{TR} = R_{TR}\ sin\left(\gamma_c\right)$$

- Distancia de trepada S_{CL}:
  Para obtener esta distancia, primeramente se obtuvo la altura al final de la transición, donde $h_{screen} = 35\ ft$ es la altura libre de obstáculos obtenida de la norma *FAR 25*:

$$h_{TR} = R_{TR} - R_{TR}\ cos\left(\gamma_c\right)$$

siendo la distancia en la trepada:

$$S_{CL} = \frac{h_{screen} - h_{TR}}{tan\,(\gamma_c)}$$

En el caso en donde la altura de transición h_{TR} resulte mayor a la altura libre de obstáculos h_{screen}, la distancia correspondiente a la trepada S_{CL} no será tenida en cuenta.

La distancia total requerida para el despegue es la suma de las distancias correspondientes a cada etapa, es decir:

$$S_{TO} = S_{NGR} + S_R + S_{TR} + S_{CL}$$

2.6.2.2 Distancia de aterrizaje

Análogamente que con la distancia de despegue, se calculan las distancias de cada etapa que comprende el aterrizaje, las mismas se muestran en la Figura 18.

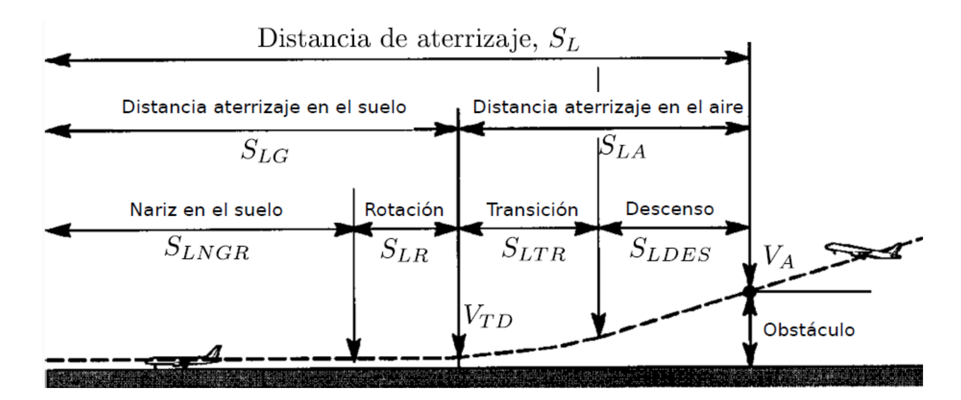


Figura 18: Fases de aterrizaje

Dónde el cálculo de cada etapa se detalla a continuación:

- Distancia en fase de descenso S_{LDES} Se calculan los parámetros que intervienen en su obtención, esto es:

  Ángulo promedio de la aproximación:

  $$\bar{\gamma}_A = -\frac{T - D}{W}$$

  Altura al inicio del flare:

  $$h_{flare} = R_{flare}\,(1 - cos\,\bar{\gamma}_A)$$

  Por lo tanto la distancia de esta etapa es:

  $$S_{LDES} = \frac{h_{screen} - h_{flare}}{tan\bar{\gamma}_A}$$



- Distancia en fase de transición S_{LTR}:
  Se obtiene primeramente el radio del flare, esto es:

$$R_{flare} = \frac{V_{flare}^2}{g\left(n_{flare} - 1\right)}$$

  Y la distancia recorrida será:

$$s_{LTR} = R_{flare}\bar{\gamma}_A$$

- Distancia con todas las ruedas en contacto con el suelo S_{LNGR}:
  Esta distancia se obtiene de resolver la siguiente integral:

$$S_{LNGR} = \int_{V_{TD}}^{0} \frac{V}{\frac{g}{W}\left\{T - D_g - \mu_{g_{brake}}\left(W - L_g\right) + 0{,}08\ W\ \left(\mu_{g_{brake}} - \mu_g\right)\right\}} dV$$

  Finalmente la distancia total de aterrizaje se obtiene de la suma de las fases mencionadas anteriormente, esto es:

$$S_{LD} = S_{LDES} + s_{LTR} + S_{LNGR}$$



2.6.3. Resultados

Los datos utilizados para la determinación de las distancias de despegue y aterrizaje se presentan en la Tabla 4 [2].

Tabla 4: Datos para cálculo de distancias de despegue y aterrizaje.

Datos	*Simbología*	*Valor*	*Unidad*
Superficie alar	S_{ref}	42.17	m^2
Peso de despegue	MTOW	12000.00	*kg*
Peso al aterrizaje	MLW	11840.00	*kg*
Coeficiente de sustentación máximo al despegue	$C_{L_{max,TO}}$	2.4333	-
Coeficiente de sustentación máximo al aterrizaje	$C_{L_{max,LD}}$	2.7065	-
Flaps para despegue	δ_{TO}	15	°
Flaps para aterrizaje	δ_{LD}	30	°
Coeficiente de rozamiento con la pista	μ_g	0.0250	-
Coeficiente de rozamiento debido al frenado	μ_{brake}	0.8000	-
Coeficiente de sustentación con efecto suelo	C_{L_g}	0.3823	-
Ángulo de inclinación de la pista	ϕ	0.00	°
Factor de carga en el flare	n_{flare}	1.08	-
Polar para despegue	$C_D = 0{,}0511 - 0{,}0187C_L + 0{,}0360C_L^2$		
Polar para aterrizaje	$C_D = 0{,}0590 - 0{,}0216C_L + 0{,}0360C_L^2$		
Velocidades para el despegue			
Velocidad de pérdida	V_s	44.24	m/s
Velocidad de rotación	$V_R = 1{,}10V_s$	48.66	m/s
Velocidad de despegue	$V_{LOF} = 1{,}15V_s$	50.88	m/s
Velocidad al final de la fase de trepada	$V_2 = 1{,}20V_s$	53.09	m/s
Velocidades para el aterrizaje			
Velocidad de pérdida	V_s	41.67	m/s
Velocidad de aproximación	$V_A = 1{,}30V_s$	54.17	m/s
Velocidad en el flare	$V_{fl} = 0{,}95V_A$	51.46	m/s
Velocidad de contacto con la pista	$V_{TD} = 1{,}15V_s$	47.92	m/s

2.6.3.1 Distancia de despegue

A continuación se presentan los resultados obtenidos para las distancias de despegue con AEO (Todos los motores operativos) y OEI (Un motor inoperativo) en las Tablas 5 y 6.

[2] Las velocidades de pérdida junto a los $C_{L_{max}}$ para el despegue y aterrizaje fueron determinados en el Apéndice 6.5

Tabla 5: Resultados obtenidos para la distancia de despegue para AEO

Distancia de despegue AEO		
Parámetro	*Símbolo*	*Valor [m]*
Distancia con nariz en pista	S_{NGR}	325
Distancia de rotación	S_R	149
Distancia de transición	S_{TR}	584
Distancia de trepada	S_{CL}	0.00
Distancia total de despegue	S_{TO}	1058

Tabla 6: Resultados obtenidos para la distancia de despegue para OEI

Distancia de despegue OEI		
Parámetro	*Símbolo*	*Valor [m]*
Distancia con nariz en pista	S_{NGR}	738
Distancia de rotación	S_R	149
Distancia de transición	S_{TR}	134
Distancia de trepada	S_{CL}	192
Distancia total de despegue	S_{TO}	1213

Finalmente, la distancia total para el despegue resulta el valor mayor de aceleración despegue con OEI y 1.15 aceleración despegue con AEO (*FAR 25.113 - Transport Category Airplanes: Structure*, 1998). Los valores obtenidos para ambos casos se presentan en las Expresiones 18 y 19.

$$\blacktriangleright \boxed{S_{TO_{AEO}} = 1{,}15 \cdot 1058\ [m] = 1217\ [m]} \tag{18}$$

$$\blacktriangleright \boxed{S_{TO_{OEI}} = 1213\ [m]} \tag{19}$$

Tomando como se dijo anteriormente el máximo de ambos valores, la distancia de despegue total resulta lo dado en la Expresión 20.

$$\blacktriangleright \boxed{S_{TO} = 1217\ [m]} \tag{20}$$

Para la resolución de las integrales se empleó el método de integración de *Simpson* con un $dv = 0{,}010$, el mismo se aplicó utilizando *Python* a través de la librería *Scipy* con su módulo *Integrate*.

2.6.3.2 Distancia de aterrizaje

A continuación en la Tabla 7 se presentan los resultados obtenidos en el cálculo de la distancia total de aterrizaje.



Tabla 7: Resultados obtenidos para la distancia de aterrizaje

Distancia de aterrizaje		
Parámetro	*Símbolo*	*Valor [m]*
Distancia de descenso	S_{LDES}	151
Distancia de transición (flare)	S_{LTR}	438
Distancia con nariz en pista	S_{LNGR}	175
Distancia total de aterrizaje	S_{LD}	764

La distancia total de aterrizaje resulta lo dado por la Expresión 21.

$$\blacktriangleright \boxed{S_{LD} = 764\ [m]} \tag{21}$$

Para la resolución de las integrales se empleó el método de integración de *Simpson* con un $dv = 0{,}010$, el mismo se aplicó utilizando *Python* a través de la librería *Scipy* con su módulo *Integrate*.

2.6.3.3 Velocidad de decisión

Se determinó la velocidad de decisión (V_1) mediante el criterio de pista balanceada (o equilibrada) (Saldía, 2023c). Los resultados que se obtuvieron se muestran en la Figura 19.

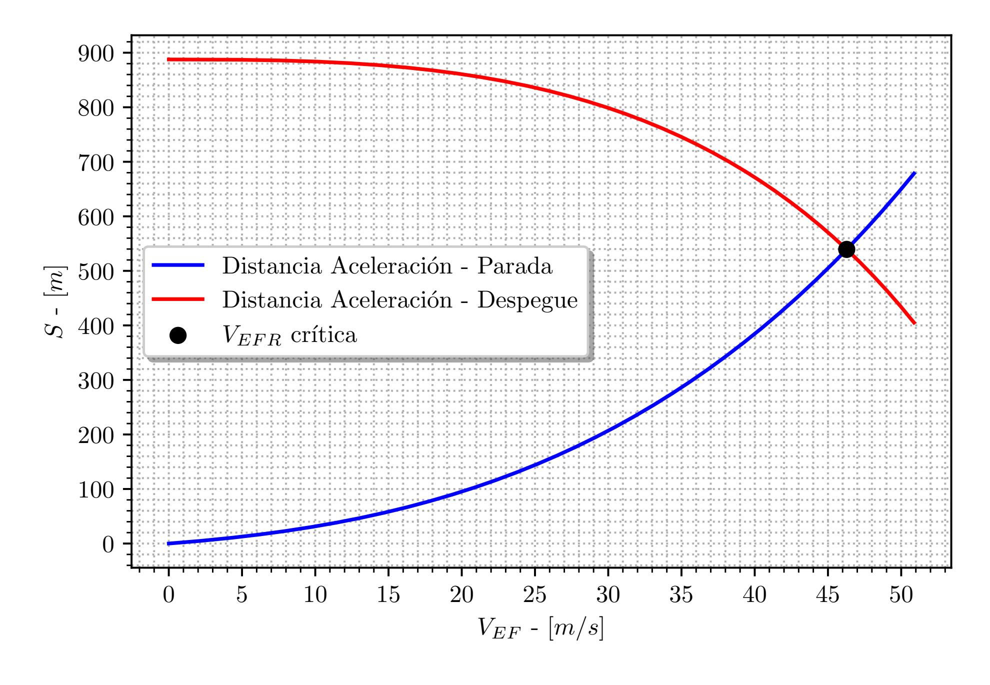


Figura 19: Criterio de pista balanceada

Resolviendo numéricamente mediante *Python* se determinó la intersección de ambas curvas y se obtuvo el valor de la velocidad de decisión o crítica; el resultado de la misma se presenta en la Expresión 22.

$$\blacktriangleright \boxed{V_1 = 46{,}28\ [m/s]} \tag{22}$$

2.6.3.4 Datos provistos por el fabricante

Para calcular la distancia de despegue, recurrimos al manual del fabricante (Short Brothers plc., 1985). Siguiendo el algoritmo proporcionado en dicho manual y considerando las características del aeropuerto seleccionado como referencia, el Aeropuerto Internacional de Córdoba Ingeniero Aeronáutico Ambrosio Taravella (FAA: CBA; IATA: COR; OACI: SACO), se detallan a continuación las condiciones clave para hacer uso del algoritmo del manual del fabricante:

- Temperatura ambiente: $11{,}8215^{\circ}C$ (aproximadamente $12^{\circ}C$)
- Peso de despegue: $MTOW$ = 12000 kg
- Altitud de presión del aeropuerto: 3298 [ft] (aproximadamente 3300 [ft]). Se determinó utilizando una referencia de QNH según la atmósfera estándar, que es de 955,86 Hpa, y considerando que el aeropuerto se encuentra a una elevación de 1604 [ft] (489 m) con respecto al nivel medio del mar (consultar Figura 22, (ANAC, 2023)).

Con estos parámetros mencionados anteriormente, el resultado proporcionado por el fabricante para la distancia de despegue es de aproximadamente 3500 [ft] (aproximadamente 1067 [m]), como se muestra en la Figura 20.

Para el caso de la distancia de aterrizaje se mantuvo el aeropuerto y las condiciones, solo cambió el peso de la aeronave el cual para esta condición se adoptó el peso máximo posible para el aterrizaje MLW = 11840 kg, asumiendo condiciones de viento en reposo y declinación de pista nula. El resultado proporcionado por el fabricante para la distancia de aterrizaje es de aproximadamente 2100 [ft] (aproximadamente 640 [m]), como se muestra en la Figura 21.

Figura 20: Distancia de despegue del manual del fabricante

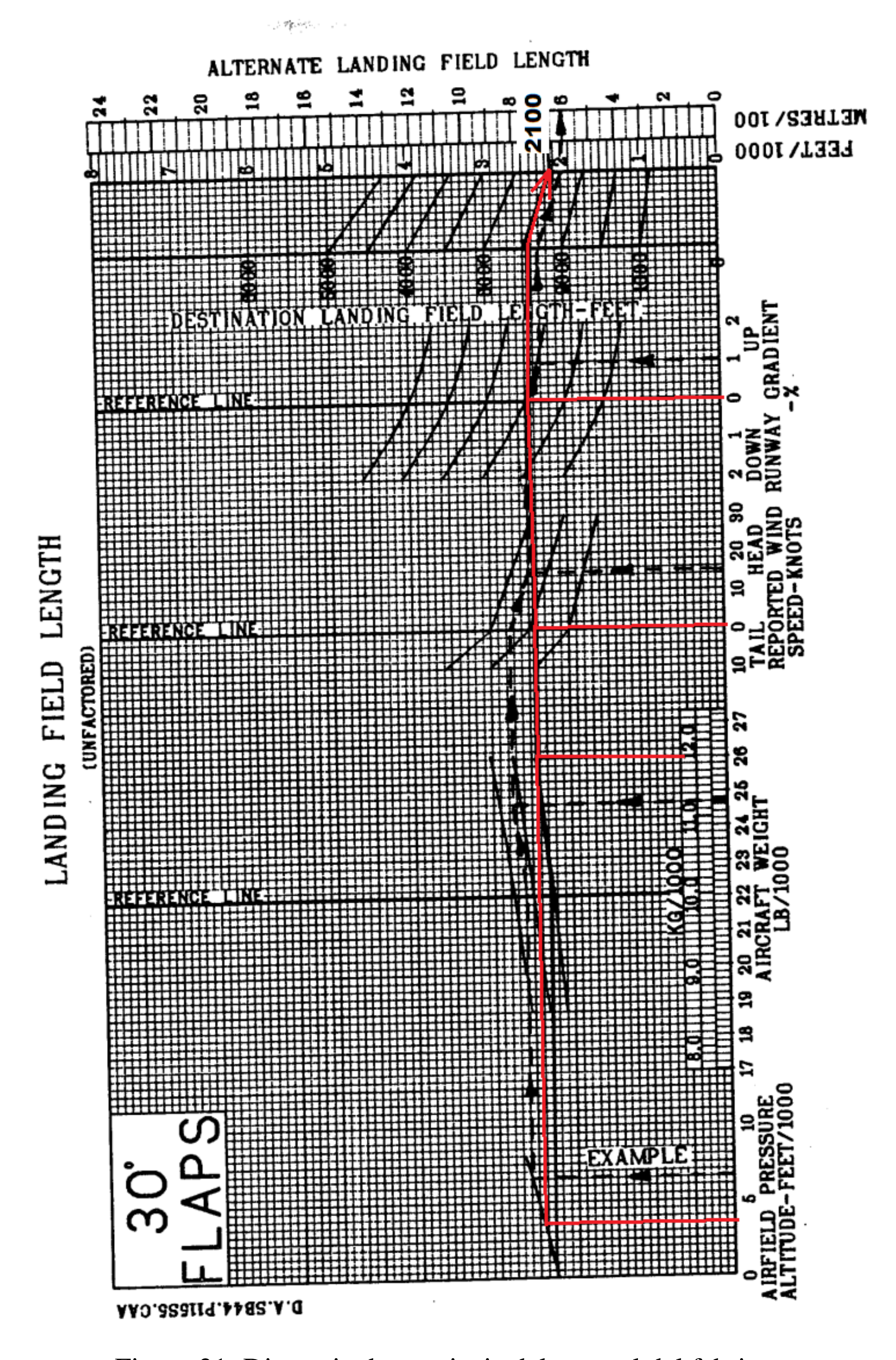


Figura 21: Distancia de aterrizaje del manual del fabricante

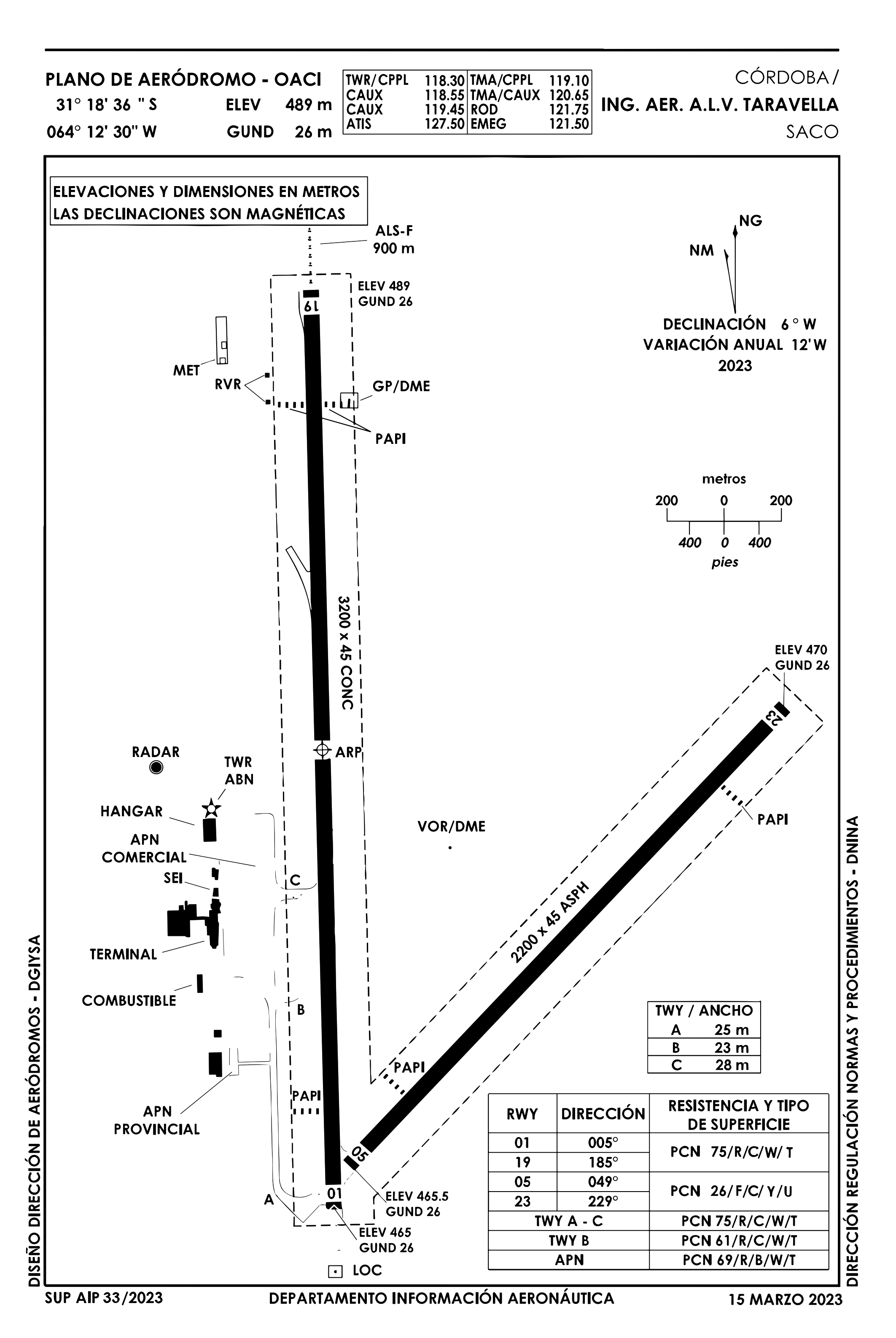


Figura 22: Detalle del Aeropuerto Internacional de Córdoba Ingeniero Aeronáutico Ambrosio Taravella



2.6.4. Discusión

En esta sección, se han calculado las distancias requeridas tanto para el *despegue* como para el *aterrizaje* de la aeronave bajo estudio, obteniendo valores de 1217 metros y 764 metros, respectivamente. En términos generales, consideramos que estos valores son adecuados para la aeronave analizada, ya que se sitúan dentro del rango esperado para una aeronave de *transporte regional*.

Es común que una aeronave *turboprop regional*, como la que estamos evaluando, necesite entre 1500 y 2000 metros de pista para operar eficazmente. Estas cifras le otorgan la flexibilidad de operar en una amplia variedad de aeropuertos, desde pequeños hasta medianos. A modo de ejemplo, la aeronave podría operar sin dificultades en aeropuertos como el de Córdoba, que cuenta con pistas de 3200 metros en la pista 01/19 y 2280 metros en la pista 05/23, el *Aeroparque Metropolitano Jorge Newbery*, que dispone de una pista de 2100 metros en la pista 13/31, o el *Aeropuerto Internacional Teniente Luis Candelaria de San Carlos de Bariloche*, que cuenta con una pista de 2200 metros en la pista 29/11, por mencionar algunos ejemplos de aeropuertos nacionales.

Es relevante destacar que el fabricante también proporciona información para calcular las distancias de despegue y aterrizaje en las condiciones de máximo peso de despegue (MTOW) y máximo peso de aterrizaje (MLW), que son 1067 metros y 640 metros, respectivamente, según se detalla en (Short Brothers plc., 1985) (ver Figuras 20 y 21). Es importante tener en cuenta que los valores calculados pueden diferir de los proporcionados por el fabricante debido a las posibles variaciones en las condiciones exactas utilizadas en los cálculos. Además, es plausible que existan diferencias sustanciales en la estimación de la curva polar de baja velocidad para ambas condiciones y esto haya inducido cierto error en los cálculos.

3. Estabilidad Estática

3.1. Introducción

El propósito fundamental de llevar a cabo un análisis de *estabilidad estática* radica en la minuciosa evaluación de las fuerzas y momentos involucrados. Esto se realiza con el fin de garantizar que, en presencia de una perturbación, estas magnitudes tiendan a realinear la aeronave hacia su posición de equilibrio original. Esto implica que la suma de todas las fuerzas y momentos que actúan sobre la aeronave debe mantener la condición de equilibrio. Este equilibrio se traduce en la conservación del *vuelo trimado*, que es el estado en el cual la aeronave mantiene su actitud y trayectoria deseada sin necesidad de correcciones constantes por parte del piloto.

3.1.1. Objetivo principal del análisis de estabilidad estática

- Mantener la condición de *vuelo trimado* (vuelo en equilibrio alrededor de algún eje).
- Lograr un equilibrio de fuerzas (lo cual ya se estudiaba en el análisis de *performance*) y momentos (lo cual se agrega en este análisis).
- Analizar las fuerzas y momentos para determinar si tienden a mantener la **condición de equilibrio**, es decir, si restauran el equilibrio después de una perturbación.

3.2. Estabilidad Estática Longitudinal

3.2.1. Introducción

En esta sección, se llevará a cabo el análisis de la *Estabilidad Estática Longitudinal* de la aeronave *Short 360* en estudio. El objetivo principal es determinar los márgenes del centro de gravedad, encontrando las posiciones del punto neutro con y sin potencia, con mando fijo y con mando libre, tanto para vuelo nivelado como para vuelo en maniobra. También se buscará identificar las posiciones más adelantadas del centro de gravedad permisibles para lograr el vuelo trimado.

Además, se analizarán otros parámetros relevantes, como la curva de sustentación para el vuelo trimado y la curva de ángulo de elevador requerido para el trimado de la aeronave en función de la velocidad de vuelo.

3.2.1.1 Hipótesis

- Se asume un movimiento simétrico en el plano de simetría de la aeronave, donde los desplazamientos están restringidos a este plano. Se considerará únicamente la rotación alrededor del eje Y_b (cabeceo) (Ver Figura 23).
- El empuje se ajusta para equilibrar la fuerza de resistencia mediante la posición del acelerador del motor.



- La sustentación se ajusta para equilibrar el peso, utilizando un coeficiente de sustentación C_L que varía según la velocidad y la altitud de vuelo.
- El momento de cabeceo M_{cg} alrededor del centro de gravedad, causado por el ala, el fuselaje, la planta motora y el empenaje, debe ser equilibrado por el momento generado por el elevador.

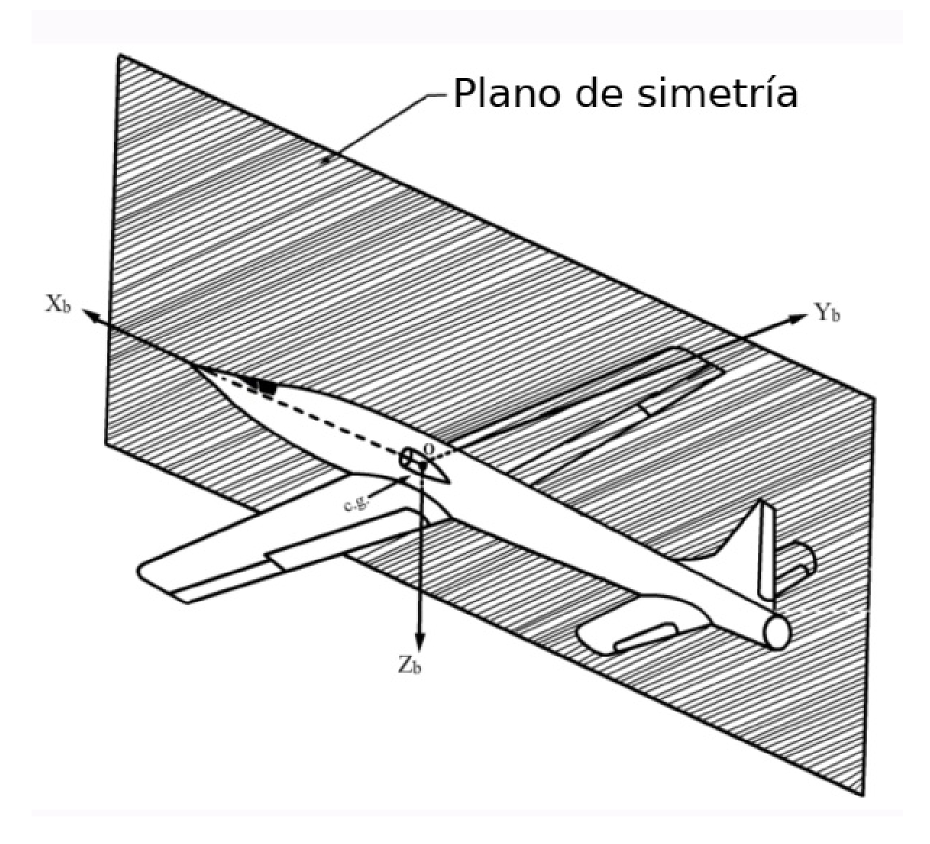


Figura 23: Aeronave, su plano de simetría y su sistema de ejes cuerpo

3.2.1.2 Objetivos

- Determinar los puntos neutros para diferentes condiciones de vuelo. Estos puntos son de particular interés, ya que representan las posiciones límite del centro de gravedad para las cuales se obtiene una derivada C_{m_α} negativa (indicativa de estabilidad) o positiva (indicativa de inestabilidad).
- Calcular los márgenes estáticos para cada condición de vuelo.

Los datos relevantes que se utilizarán en esta sección se presentan en la Tabla 8. [3]

[3] Para ver la estimación de algunos de los parámetros mas relevantes, consultar el Apéndice 6

Tabla 8: Datos necesarios - Estabilidad Estática Longitudinal

Parámetro	*Símbolo*	*Valor*	*Unidad*
Posición del centro aerodinámico ala-fuselaje	$h_{n_{wb}}$	0.0611	*Adim.*
Relación de presiones dinámicas	η_t	0.9500	*Adim.*
Pendiente de sustentación E.H.	a_t	4.3523	$1/rad$
Pendiente de sustentación ala - fuselaje	a_{wb}	6.2290	$1/rad$
Superficie alar	S	42.7300	m^2
Superficie de E.H.	S_t	9.8300	m^2
Superficie del elevador	S_e	3.7975	m^2
Gradiente de Downwash	$\partial\epsilon/\partial\alpha$	0.3640	*Adim.*
Downwash a incidencia nula	ϵ_0	0.0597	*rad*
Pendiente de la configuración completa	a	6.8687	$1/rad$
C.G. de la aeronave	h	0.2650	*Adim.*
Distancia entre C.A. ala - fuselaje y E.H.	$\bar{l}_t$	10.9850	m
Distancia entre C.A. empenaje horizontal y C.G. del avión	l_t	10.5377	m
Cuerda Aerodinámica Media	$\bar{c}$	1.9900	m
Volumen de cola	V_H	1.2182	*Adim.*
Volumen de cola	$\bar{V}_H$	1.2699	*Adim.*
Diámetro de la Hélice	D_p	2.8200	m
Ángulo de pala	β	30.0000	$^\circ$
Área de la hélice	S_p	6.2458	m^2
Distancia desde el plano de la hélice hasta 1/4 CAM	$x_p \cdot l_p$	1.8613	m
Coeficiente de cabeceo libre del ala-fuselaje	$C_{m_{ca_{wb}}}$	-0.2106	*Adim.*
Ángulo de calaje del E.H	i_t	-4.5000	$^\circ$
Pendiente de sustentación del perfil E.H (NACA 0012)	$C_{l_{\alpha_t}}$	5.7869	$1/rad$
Pendiente de sustentación mando libre	a'	6.5640	$1/rad$
Cuerda aerodinámica media del E.H.	$\bar{C}_e$	1.5800	m
Masa de la aeronave	m	9587.2739	kg

3.2.2. Margen estático para mando fijo con y sin potencia

En la condición de *Mando Fijo*, las superficies de control se mantienen en una posición fija y controlable, lo que significa que el parámetro de control, la deflexión del elevador, no está influenciado por fuerzas aerodinámicas, sino que se ajusta de manera que permanezca en una posición constante. El margen estático se define como la diferencia entre las posiciones del centro de gravedad (h) y el punto neutro (h_n) (Etkin, 2005; Etkin y Reid, 1996).

$$K_n = h_n - h$$

El **punto neutro con mando fijo** h_n se obtiene cuando $C_{m_\alpha} = 0$, lo que indica una estabilidad neutra. Su cálculo se presenta en la Expresión 23.



$$h_n = h_{n_{wb}} + \eta_t \frac{a_t}{a} \overline{V}_H \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right) - \frac{1}{a} \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} \tag{23}$$

Para la condición sin potencia, se ignora la contribución del momento de la fuerza normal debido al sistema propulsivo a la estabilidad longitudinal, representado por $\frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}$. Este término se calculó de acuerdo con la siguiente expresión (Saldía, 2023a):

$$\frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha} = \frac{S_p}{S} \frac{x_p}{\bar{c}} \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial C_{n_p}}{\partial \alpha_p}$$

En donde el gradiente de *upwash* $\frac{\partial \epsilon_p}{\partial \alpha} = 0{,}30$ fue estimado utilizando el Reporte *NACA WRL25* para alas elípticas (consultar Ref. (Ribner, 1944)) a través de la Figura 24. Además, el término $\frac{\partial C_{n_p}}{\partial \alpha_p} = 0{,}27\ 1/rad$, que refleja la variación del coeficiente C_{n_p} con el ángulo de incidencia sobre el plano de la hélice α_p, se estimó utilizando el Reporte *NACA 819* (consultar Ref. (Ribner, 1945)) para una relación de avance de $J = 1{,}64$ y un ángulo de pala de $\beta = 30^{\circ}$. Dado que la aeronave cuenta con una hélice de 5 palas, se tomó un promedio entre los gráficos correspondientes a hélices *Hamilton Standard* de 6 y 4 palas, como se muestra en la Figura 25.

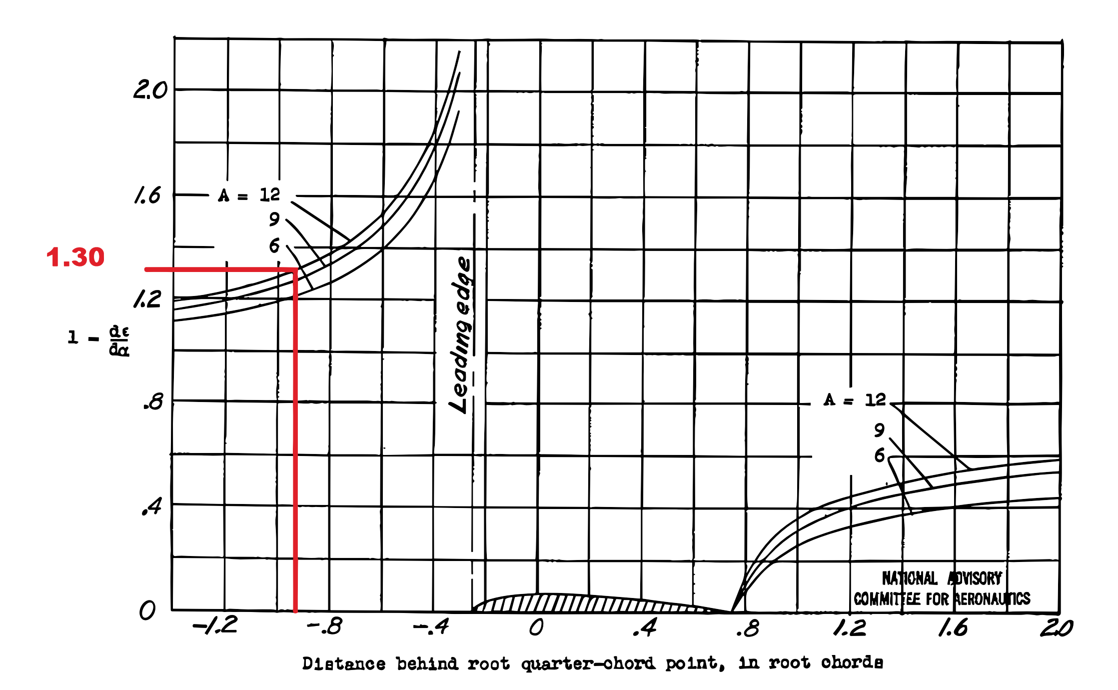


Figura 24: Estimación del gradiente de Upwash

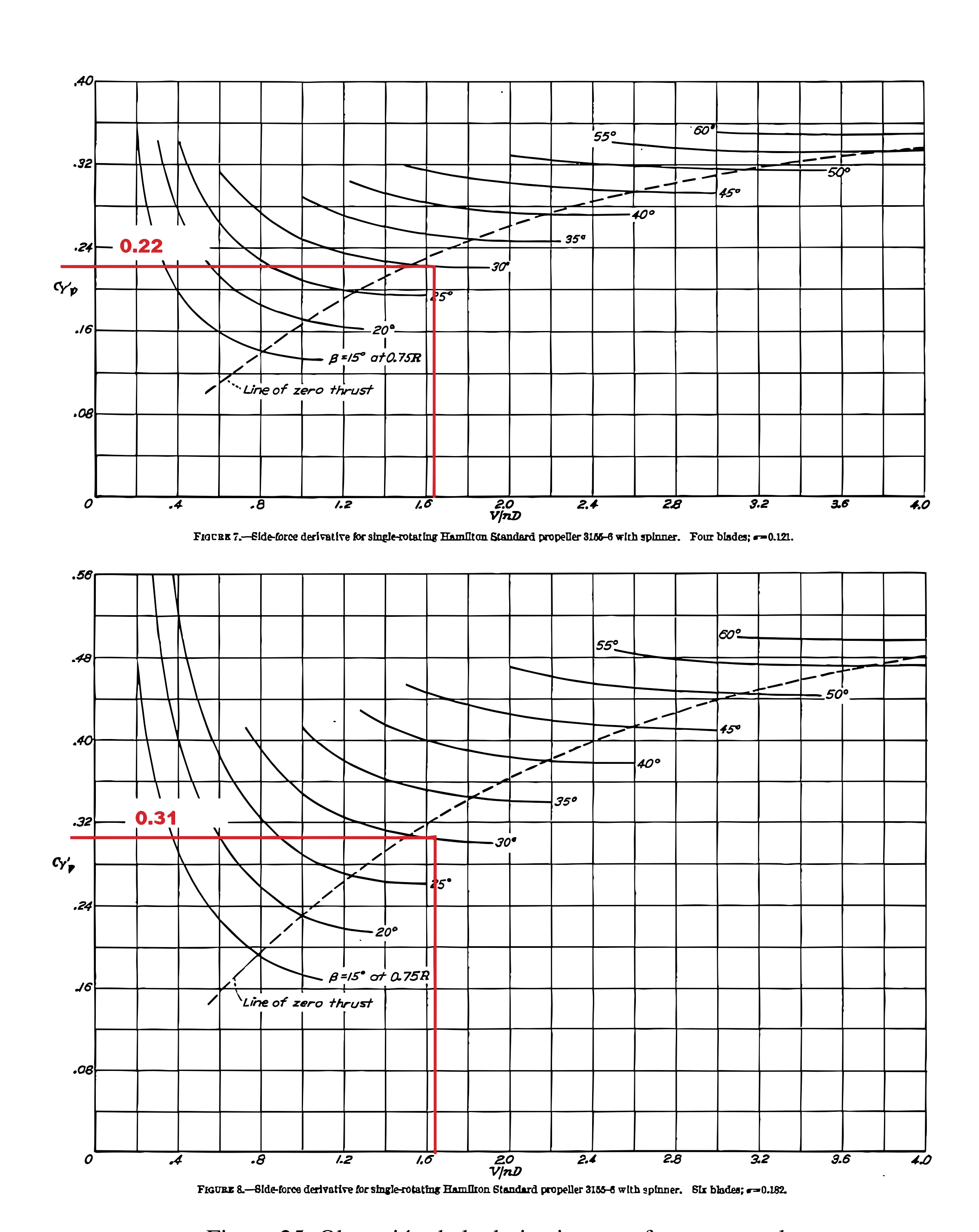


Figura 25: Obtención de la derivativa para fuerza normal

Los puntos neutros para mando fijo, tanto sin como con potencia, resultaron:

- $h_{n_{sp}} = 0{,}5751$
- $h_{n_{cp}} = 0{,}5635$

Por otro lado los valores de los margenes estáticos para mando fijo resultaron:

- $K_{n_{sp}} = 0{,}3101$
- $K_{n_{cp}} = 0{,}2985$

3.2.3. Margen estático para mando libre con y sin potencia

En la condición de *mando libre*, las superficies de control están libres, y la posición que adopten dependerá de las fuerzas aerodinámicas. Esto implica que el **coeficiente de momento de charnela** asume un valor de $(C_{H_e}) = 0$, y que el ángulo del elevador resulta ser el llamado ángulo de flotación $\delta_e = \delta_{e_{flot}}$.

Se define al margen estático con mando libre como la diferencia entre las posiciones del centro de gravedad (h) y el **punto neutro con mando libre** (h'_n), expresado como:

$$K'_n = (h'_n - h)$$

El cálculo del **punto neutro con mando libre** se obtiene al plantear $C'_{m_\alpha} = C_{m_\alpha} - \dfrac{C_{m_\delta} C_{H_{e_\alpha}}}{C_{H_{e_{\delta_e}}}} = 0$ (estabilidad neutra). La expresión para calcular h'_n se presenta en la ecuación de la Expresión 24:

$$\boxed{h'_n = h_n + \frac{C_{L_{\delta_e}} C_{H_{e_\alpha}}}{a' C_{H_{e_\delta}}} h_n - \frac{1}{a'}\left(a_e \bar{V}_H + C_{L_{\delta_e}} h_{n_{wb}}\right) \frac{C_{H_{e_\alpha}}}{C_{H_{e_\delta}}}} \tag{24}$$

en donde la variación $\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta_e} = C_{L_{\delta_e}}$ del coeficiente de sustentación de la configuración completa por la deflexión del elevador se calculó como:

$$C_{L_{\delta_e}} = \eta_t a_e \frac{S_t}{S} = \eta_t a_t \tau \frac{S_t}{S} = 0{,}5975$$

en donde el valor de la efectividad del elevador $\tau = 0{,}59$ se obtuvo con la Figura 26 para una relación de superficies $\dfrac{S_e}{S_t} = 0{,}38$.

La estimación de los coeficientes de charnela con efectos tridimensionales se realizó mediante el procedimiento recomendado por la cátedra y el mismo se encuentra detallado en el Reporte de la NACA WR L - 663 (consultar Ref. (Sears, 1943)). Se utilizaron las Figuras 27a y 27b. Los coeficientes de charnela tridimensionales resultaron luego de aplicar el método lo siguiente:

$$C_{H_\alpha} = -0{,}0010\ [1/DEG] \qquad C_{H_\delta} = -0{,}0045\ [1/DEG]$$

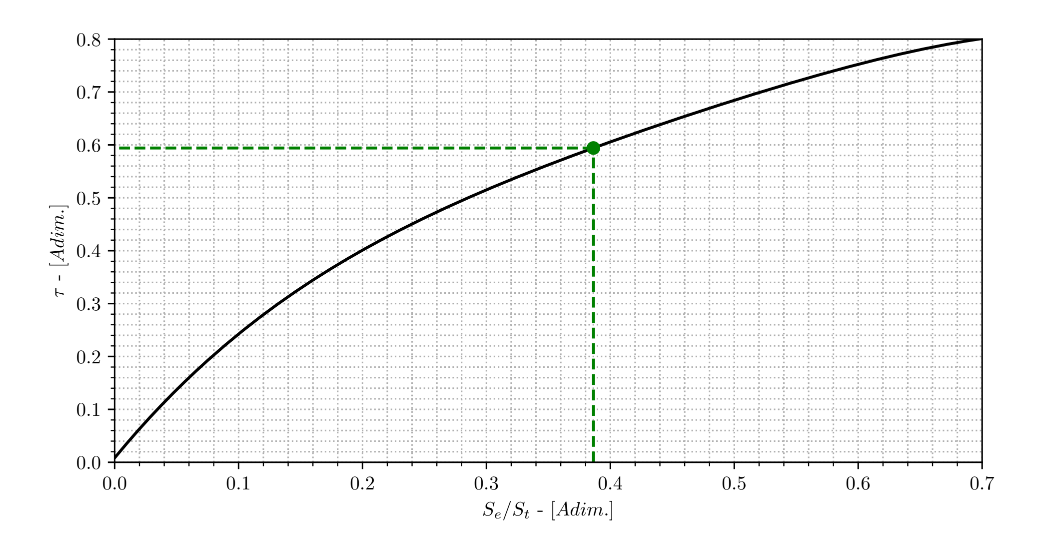
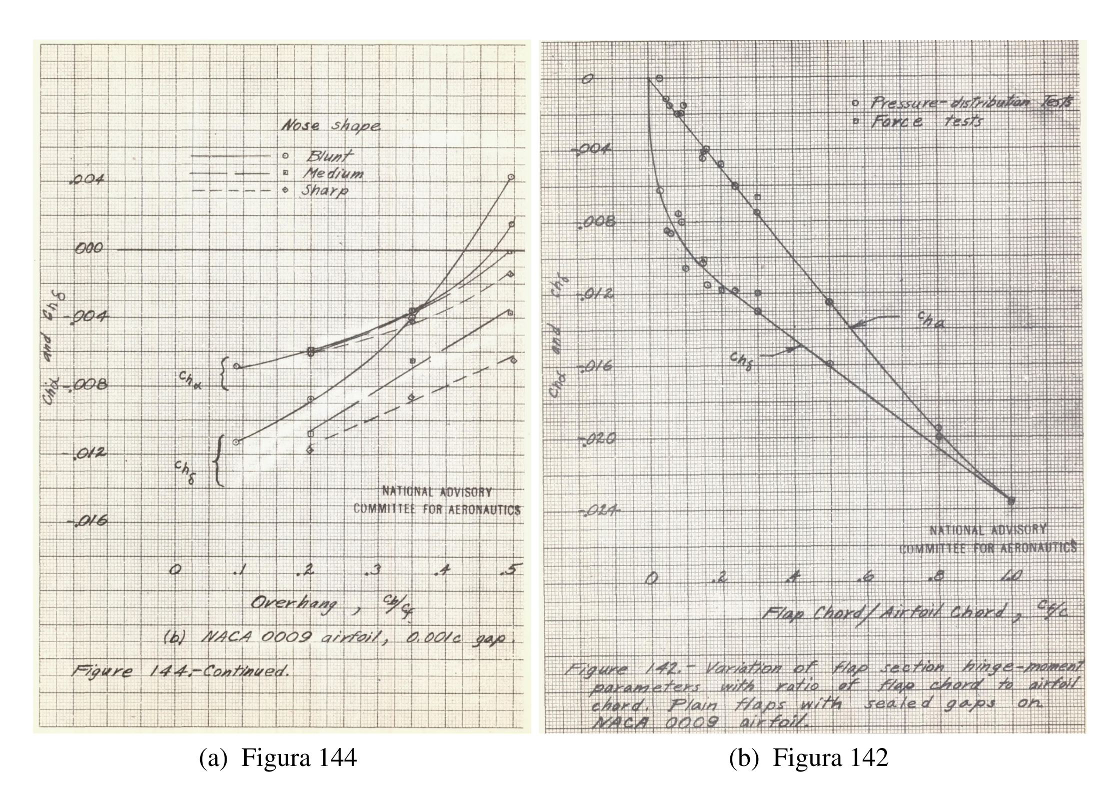


Figura 26: Obtención del parámetro de efectividad del elevador τ



(a) Figura 144 (b) Figura 142

Figura 27: Reporte de la NACA WR L - 663

Los puntos neutros para mando libre, tanto sin como con potencia, resultaron:



- $h'_{n_{sp}} = 0{,}4721$
- $h'_{n_{cp}} = 0{,}4603$

Por otro lado los valores de los margenes estáticos para mando libre resultaron:

- $K'_{n_{sp}} = 0{,}2071$
- $K'_{n_{cp}} = 0{,}1953$

3.2.4. Puntos neutros de maniobra para mando fijo y mando libre

En el caso de vuelo recto nivelado estacionario, se requiere un ángulo del elevador δ_e y una fuerza en el mando P para mantener la condición de equilibrio de momento longitudinal. En el caso de realizar una maniobra, se necesitarán cambios $\Delta\delta_e$ y ΔP para mantener el equilibrio en esta condición de vuelo, ya que aparece una *velocidad angular de cabeceo* (q) que modifica los coeficientes aerodinámicos de sustentación y momento ($\Delta C_L; \Delta C_m$). Dado que asumimos el vuelo en maniobra como **estacionario** (sin aceleración angular), se tiene $\Delta C_m = 0$ (para mantener el equilibrio).

$$\frac{\Delta\delta_e}{n-1} = -\frac{C_W C_{L_\alpha}\left(2\mu - C_{L_q}\right)}{2\mu\Delta}(h - h_m) \tag{25}$$

La posición del centro de gravedad para la cual el ángulo del elevador por la gravedad es nulo $\left(\frac{\Delta\delta_e}{(n-1)}\right) = 0$, se denomina **punto neutro de maniobra con mando fijo** y se define como se muestra en la ecuación de la Expresión 26:

$$\boxed{h_m = h_n - \frac{C_{m_q}}{2\mu - C_{L_q}}} \tag{26}$$

Donde el factor de densidad relativa μ se calcula como:

$$\mu = \frac{2m}{\rho S \bar{c}} = 249{,}3359$$

Las derivadas C_{L_q}, C_{m_q}, y $C_{H_{e_q}}$, que indican la dependencia de los coeficientes aerodinámicos de *sustentación* y *momento*, y el coeficiente de *momento de charnela*, con la velocidad angular de cabeceo (q), se calculan como:

$$C_{L_q} \approx \left(C_{L_q}\right)_t = 2\eta_t a_t V_H = 10{,}6518\ [1/rad]$$

$$C_{m_q} \approx \left(C_{m_q}\right)_t = -2\eta_t a_t \frac{l_t}{\bar{c}} V_H = -56{,}4045\ [1/rad]$$

$$C_{H_{e_q}} = 2C_{H_{\alpha_t}} \frac{l_t}{\bar{c}} = -2{,}1123\ [1/rad]$$

Estos cambios en los coeficientes aerodinámicos son debidos al incremento del ángulo de incidencia sobre el empenaje horizontal debido a la velocidad angular (q) en la maniobra. Por otro lado, el **punto neutro de maniobra con mando libre** está dado por la ecuación de la Expresión 27:

$$h'_m = h_m + \frac{\Delta}{C'_{L_\alpha} C_{H_{\delta_e}}} \left(\frac{C_{H_{e_\alpha}}}{C_{L_\alpha}} + \frac{C_{H_{e_q}}}{2\mu - C_{L_q}} \right) \tag{27}$$

Donde la variación del coeficiente de momento de charnela por el ángulo de ataque de la configuración completa (α) se obtuvo como:

$$C_{H_{e_\alpha}} = C_{H_{e\alpha_t}} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right) = -0{,}0364\ [1/rad]$$

Finalmente, los puntos neutros de maniobra, para mando fijo y mando libre, sin y con potencia, resultaron respectivamente:

- $h_{m_{sp}} = 0{,}6881$
- $h_{m_{cp}} = 0{,}6765$
- $h'_{m_{sp}} = 0{,}6093$
- $h'_{m_{cp}} = 0{,}5977$

y los márgenes estáticos:

- $K_{m_{sp}} = 0{,}4231$
- $K_{m_{cp}} = 0{,}4115$
- $K'_{m_{sp}} = 0{,}3443$
- $K'_{m_{cp}} = 0{,}3327$

3.2.5. Diagrama de puntos neutros y C.G.

Con los resultados obtenidos en las secciones anteriores, se ha creado el gráfico de la Figura 28, el cual muestra las posiciones de los puntos neutros para las condiciones de mando fijo y mando libre, considerando y sin considerar los efectos de potencia. En cuanto al vuelo en maniobra, los puntos neutros se han representado de manera similar a lo detallado anteriormente, como se puede apreciar en la Figura 29. Finalmente, en la Figura 30, se presentan los puntos neutros para las condiciones de mando fijo y mando libre tanto en vuelo nivelado como en vuelo en maniobra.

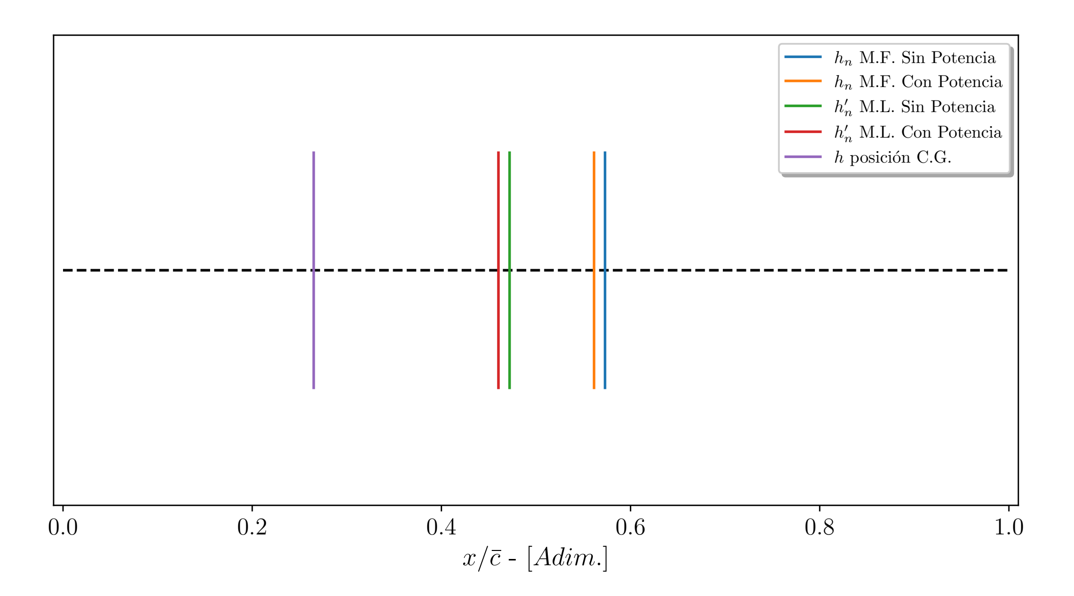


Figura 28: Posición de los puntos neutros de mando fijo y mando libre

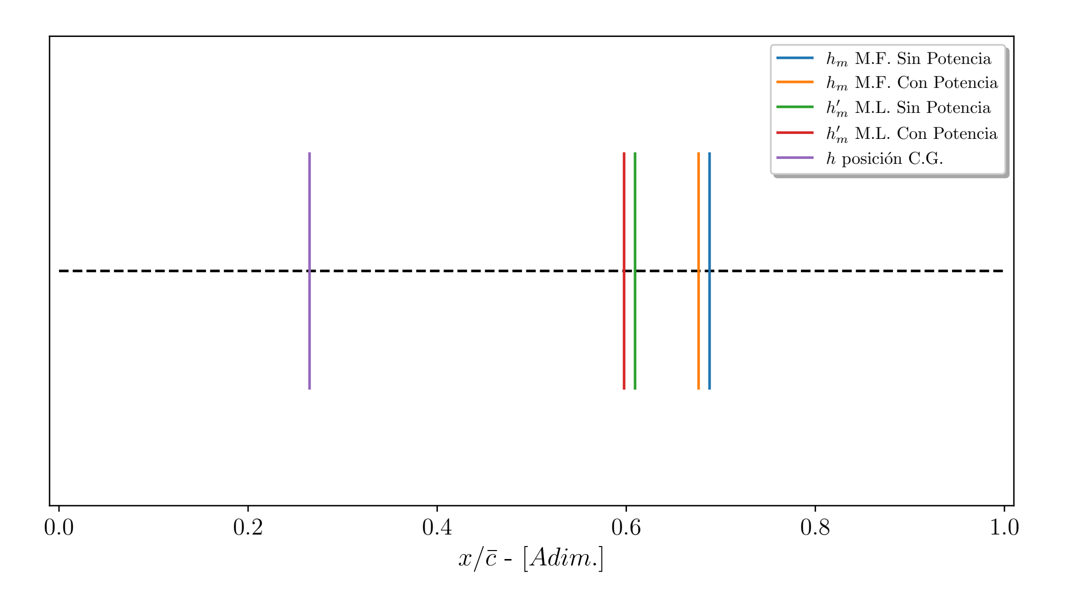


Figura 29: Posición de los puntos neutros de mando fijo y mando libre para vuelo en maniobra

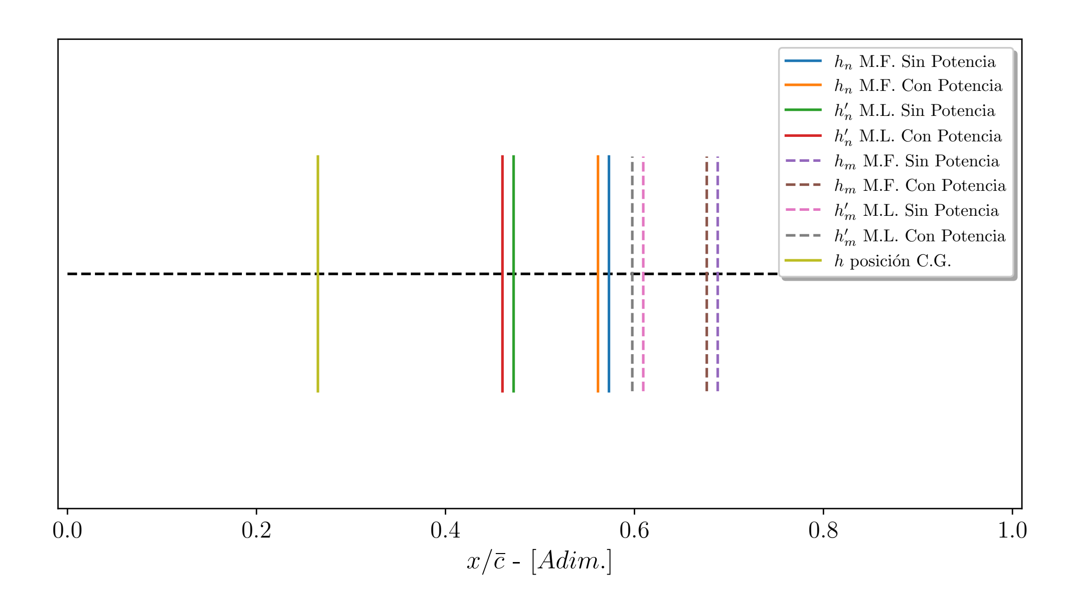


Figura 30: Posición de los puntos neutros para vuelo nivelado y vuelo en maniobra

3.2.6. Curva de sustentación en vuelo trimado

Para entrar en la condición de vuelo trimado, es necesario que se cumpla:

$$C_m = 0$$

Al definir un coeficiente de sustentación de trimado para el vuelo deseado, se llega a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que relacionan dicho coeficiente con el ángulo de elevador necesario para esta condición. Luego de solucionado es posible obtener la ecuación para el coeficiente de sustentación en la condición de trimado, el mismo se encuentra dado por la Expresión 28.

$$C_{L_{\text{trim}}} = -\frac{C_{m_0} C_{L_\delta}}{C_{m_\delta}} + \left(C_{L_\alpha} - \frac{C_{L_\delta} C_{m_\alpha}}{C_{m_\delta}} \right) \alpha_{\text{trim}} \tag{28}$$

En donde el coeficiente de momento total de cabeceo en relación con el ángulo de ataque se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$C_{m_\alpha} = C_{L_\alpha}(h - h_{wb}) - \eta_t \bar{V}_H \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \alpha} + \frac{\partial C_{m_p}}{\partial \alpha}$$

Cuando se desplaza el elevador, se produce una modificación en el ángulo de ataque de todo el empenaje horizontal, lo que a su vez afecta la sustentación y el momento alrededor del centro de gravedad de la aeronave.

La capacidad del elevador para modificar el coeficiente de momento se conoce como **potencia del elevador** C_{m_δ}, y se define como:

$$C_{m_\delta} = -\eta_t a_e \left[\bar{V}_H - \frac{S_t}{S}(h - h_{wb}) \right]$$

En la Figura 31 se muestra gráficamente la pendiente de sustentación para vuelo trimado sin potencia.

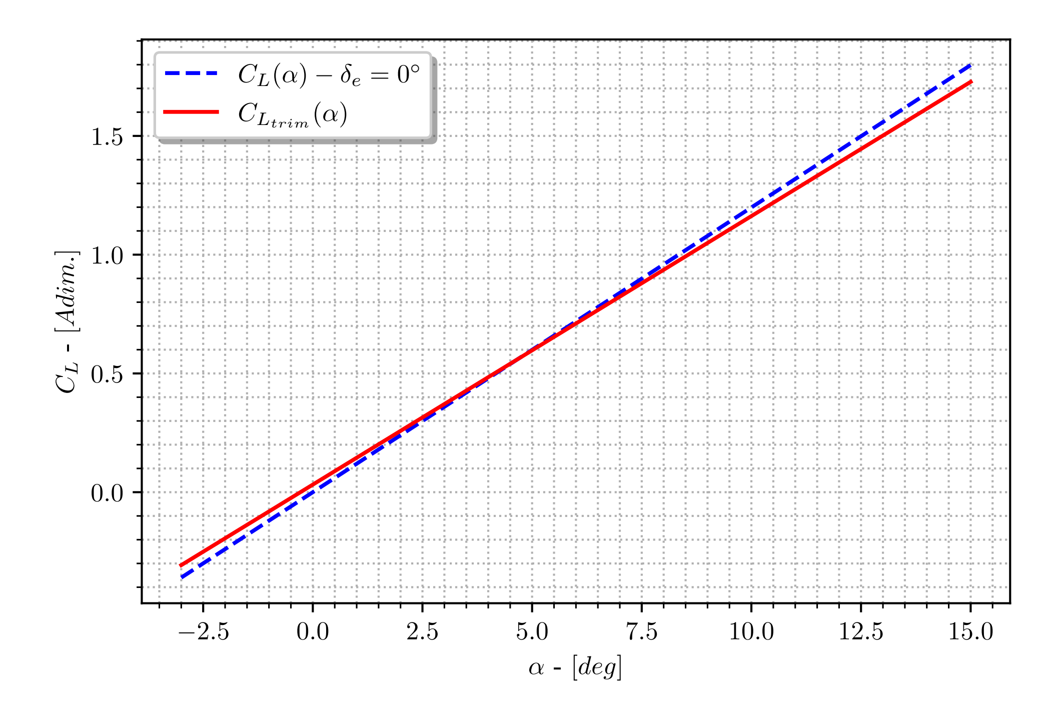


Figura 31: Curva de sustentación en vuelo trimado

3.2.7. Curva de ángulo del elevador necesario para mantener el vuelo trimado

El ángulo del elevador necesario para vuelo trimado se calcula a través de la Expresión 29.

$$\delta_{e_{trim}} = \delta_{e_0} + \frac{d\delta_{e_{trim}}}{dC_{L_{trim}}} C_{L_{trim}} \tag{29}$$

El primer término, correspondiente a la sustentación nula se obtiene de:

$$\delta_{e_0} = -\frac{C_{m_0} C_{L_\alpha}}{\Delta}$$

Donde el determinante Δ se define como:

$$\Delta = C_{L_\alpha} C_{m_\delta} - C_{m_\alpha} C_{L_\delta}$$

Por último, la derivada de la posición del elevador con respecto al coeficiente de sustentación para vuelo trimado se obtiene de:

$$\frac{d\delta_{e_{trim}}}{dC_{L_{trim}}} = -\frac{C_{L_\alpha}}{\Delta}(h - h_n)$$

Se realiza la curva para la condición crucero para el valor de $h = 0{,}265$ dado en la Tabla 8 teniendo y no teniendo en cuenta los efectos de potencia, esto mismo se encuentra representado en



la Figura 32. Luego en la Figura 33 se realiza el mismo gráfico solo que en función de la velocidad equivalente.

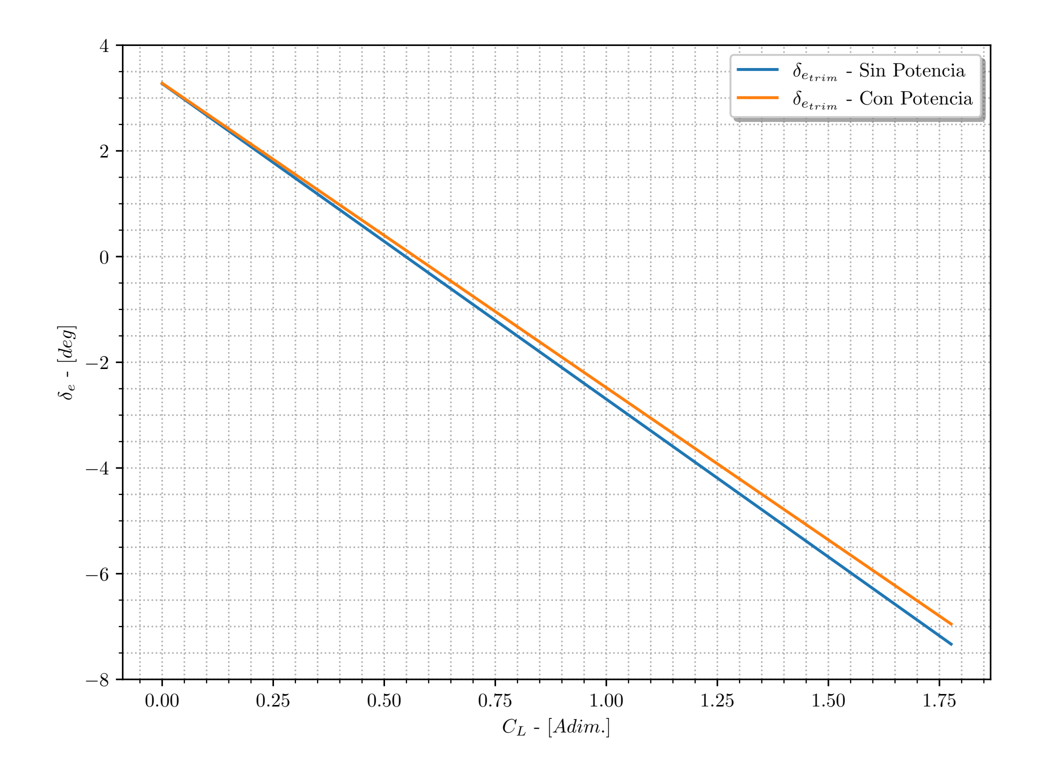


Figura 32: Curva de ángulo del elevador necesario para $h = 0{,}265$

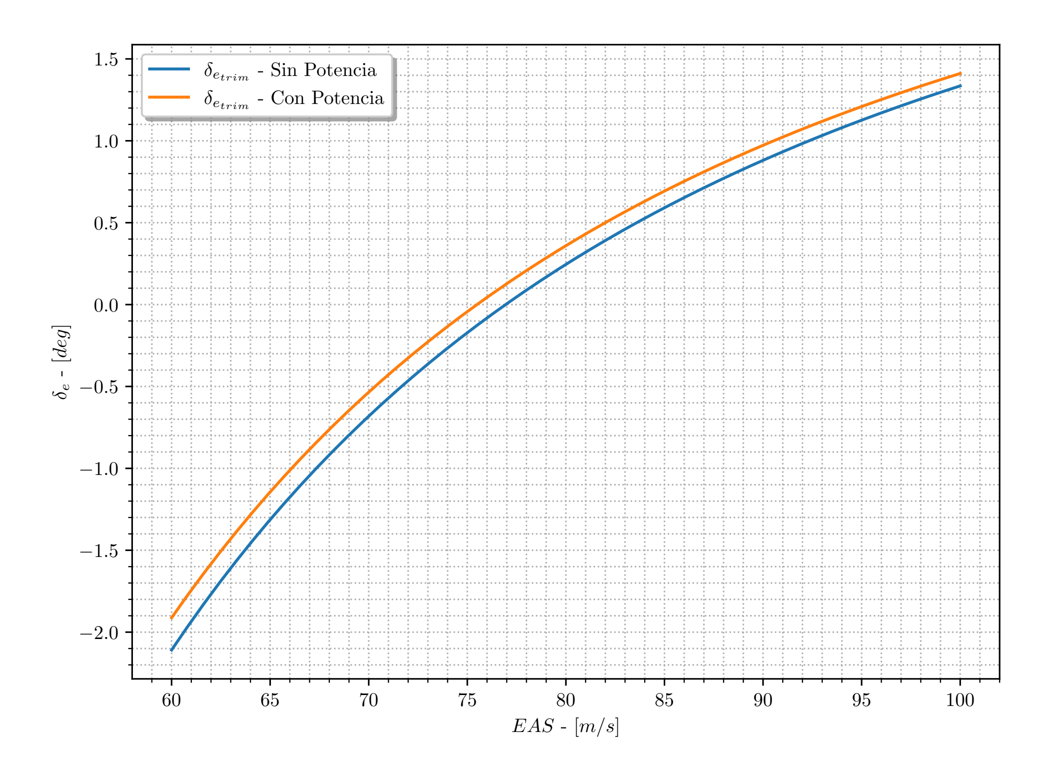


Figura 33: Curva de ángulo del elevador necesario para $h = 0{,}265$ con velocidad equivalente

3.2.8. Curva de Ángulo de Elevador Requerido por g

Se ha obtenido la curva que representa el ángulo de elevador requerido por g en función de la velocidad equivalente, utilizando la condición de vuelo crucero con potencia. Para este propósito, se empleó la Expresión 25 (Repetida mas abajo). La representación gráfica de esta curva se muestra en la Figura 34.

$$\frac{\Delta\delta_e}{n-1} = -\frac{C_W C_{L_\alpha}\left(2\mu - C_{L_q}\right)}{2\mu\Delta}\,(h - h_m)$$

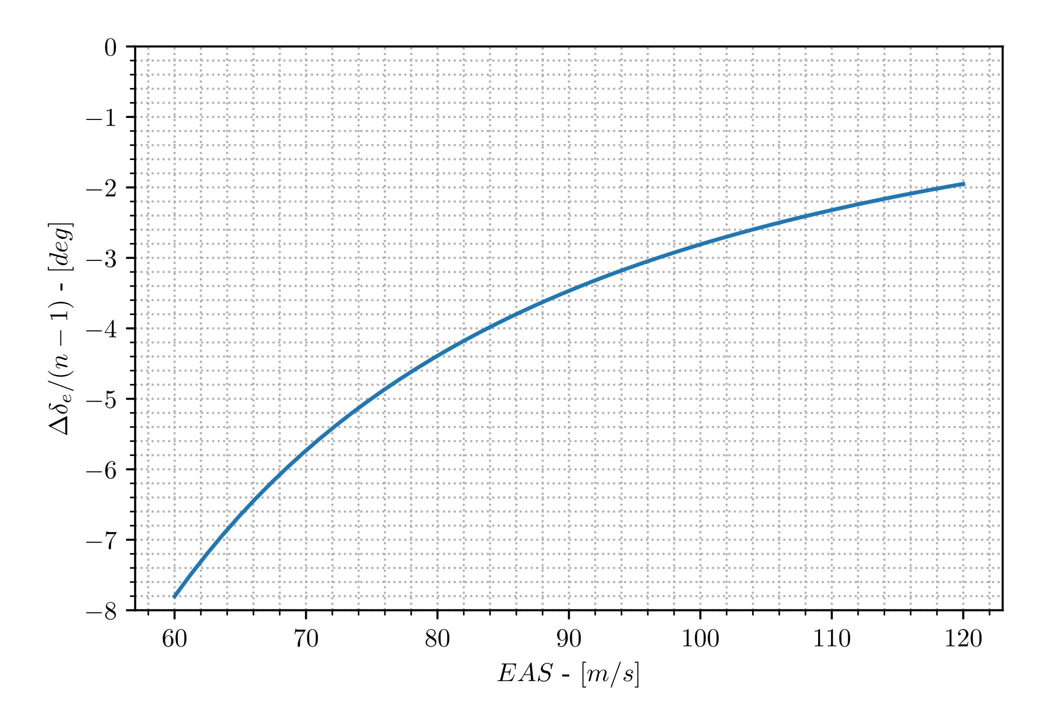


Figura 34: Curva del Ángulo de Elevador Requerido por g en función de la Velocidad Equivalente

3.2.9. Posición mas adelantada del C.G.

Se determinó la posición más adelantada del centro de gravedad teniendo en cuenta la deflexión máxima del elevador obtenida del certificado tipo (EASA, 2019) y considerando el $C_{L_{max}}$ calculado en *Performance*. Este cálculo se basa en la pendiente de la recta que se obtiene al considerar los puntos de δ_{e_0} con $C_L = 0$ y $\delta_{f_{max}} = -12°$ con $C_L = C_{L_{max}}$. Con esta pendiente, podemos despejar la posición más adelantada del centro de masas utilizando la fórmula de la Expresión 30.

$$h = h_n - \frac{d\,\delta_e}{d\,C_L}\frac{\Delta}{a} \tag{30}$$

de esto último se obtuvo:

$$\blacktriangleright \quad \boxed{h_{adel,max} = 0{,}1186} \tag{31}$$

Luego sumando este resultado al gráfico dado en la Figura 30 se obtiene el gráfico de la Figura 35.

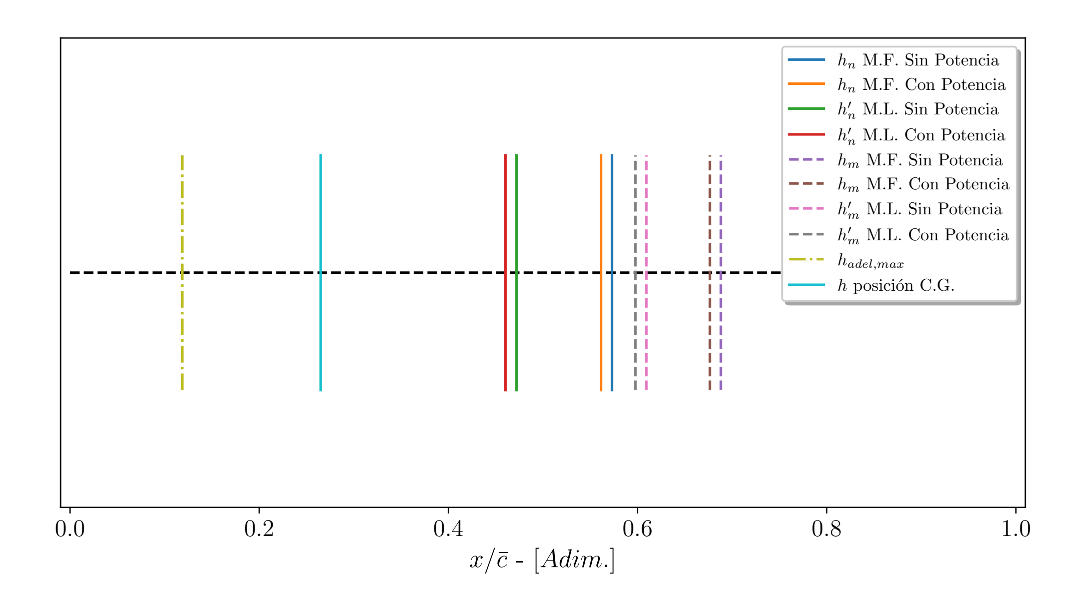


Figura 35: Puntos neutros junto a la posición de h mas adelantada.

3.2.10. Condición de despegue

Finalmente teniendo en cuenta la condición de despegue de la aeronave y aplicando nuevamente la metodología anteriormente detallada, se determinaron nuevamente las posiciones mas adelantadas y atrasadas posibles del centro de gravedad, los resultados obtenidos se representan en la Tabla 9 y en la Figura 36.

Tabla 9: Resultados obtenidos para la condición de despegue

Resultado	*Símbolo*	*Valor*
Punto Neutro de Mando Fijo Sin Potencia	$h_{n_{sp}}$	0,5739
Punto Neutro de Mando Fijo Con Potencia	$h_{n_{cp}}$	0,5656
Punto Neutro de Mando Libre Sin Potencia	$h'_{n_{sp}}$	0.4482
Punto Neutro de Mando Libre Con Potencia	$h'_{n_{cp}}$	0.4397
Punto Neutro de Maniobra con Mando Fijo Sin Potencia	$h_{m_{sp}}$	0.6693
Punto Neutro de Maniobra con Mando Fijo Con Potencia	$h_{m_{cp}}$	0,6609
Punto Neutro de Maniobra con Mando Libre Sin Potencia	$h'_{m_{sp}}$	0.5798
Punto Neutro de Maniobra con Mando Libre Con Potencia	$h'_{m_{cp}}$	0.5715
Posición mas adelantada	$h_{adel,max}$	0.2106

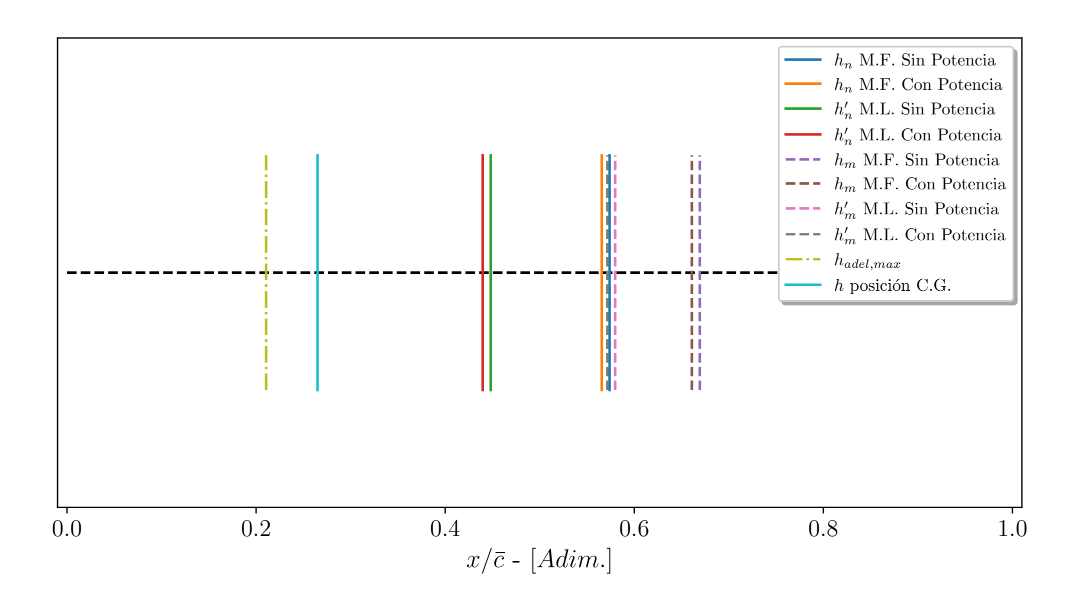


Figura 36: Puntos neutros junto a la posición de *h* mas adelantada en condición de despegue.

3.2.11. Discusión

En esta sección, se ha llevado a cabo un minucioso análisis de la *Estabilidad Estática Longitudinal* de la aeronave asignada al grupo, el *Short 360*. Los resultados obtenidos han permitido visualizar cómo el factor de la potencia introduce inestabilidad como también las condiciones de *Mando Libre*, que se revelaron como las más críticas en términos de estabilidad, tanto en vuelo crucero como en condiciones de despegue. Como conclusión, se confirma que, tal como se esperaba para una aeronave de este tipo, el *Short 360* muestra un comportamiento estáticamente estable en todas las condiciones de vuelo analizadas en este apartado.

Por otro lado, las curvas de ángulo de elevador en función del coeficiente de sustentación en vuelo trimado presentan un comportamiento dentro de los parámetros normales. Se observa un desplazamiento hacia abajo de estas curvas, así como una disminución de la pendiente cuando se quita el factor correspondiente a la potencia. Del mismo modo, las curvas de ángulo de elevador en función de la velocidad equivalente de vuelo (EAS) también muestran un desplazamiento hacia abajo cuando se quita el factor correspondiente a la potencia.



3.3. Estabilidad Estática Direccional

3.3.1. Introducción

En esta sección, se llevará a cabo un análisis de la estabilidad direccional de la aeronave asignada al grupo, el *Short 360*. El enfoque se centrará en el aspecto estático de la estabilidad con respecto a perturbaciones laterales contenidas en el plano horizontal. Se supone que la respuesta de la aeronave es lo suficientemente lenta como para desestimar los efectos de la *velocidad de guiñada* y la *velocidad de rolido*.

En la presente sección se empleará la metodología presentada en la bibliografía recomendada por la cátedra (Pamadi, 2004; U.S. Department of Defense, 1977). Los datos requeridos para esta sección se encuentran dados en la Tabla 10.

Tabla 10: Datos necesarios - Estabilidad Estática Direccional

Parámetro	*Símbolo*	*Valor*	*Unidad*
Pendiente de sustentación E.V.	a_v	4.2288	$1/rad$
Ángulo de flecha al cuarto de cuerda	$\Lambda_{c/4}$	0.3015	$^\circ$
Ángulo de diedro	Γ	3.0000	$^\circ$
Alargamiento	A	12.1657	*Adim.*
Distancia entre el CG y el CA_{wb}	$\bar{x}_a$	0.2039	*Adim.*
Relación de presiones dinámicas	η_v	1.0000	*Adim.*
Volumen de cola del E.V.	V_v	0.0833	*Adim.*
Superficie alar	S	42.7300	m^2
Superfice lateral del fuselaje	$S_{B,S}$	44.5453	m^2
Superficie del E.V.	S_v	7.7300	m^2
Envergadura	b	22.8000	m
Longitud del fuselaje	l_f	21.2000	m
Longitud del fuselaje / 4	$l_f/4$	5.3000	m
Longitud del fuselaje · 3/4	$l_f \cdot 3/4$	15.9000	m
Altura del fuselaje a $l_f/4$	h_1	2.8092	m
Altura del fuselaje a l_f· 3/4	h_2	2.1366	m
Reynolds del Fuselaje	Re_f	1.13E+08	*Adim.*
C.G. desde la nariz del fuselaje	x_m	8.5301	m
Deflexión del rudder máxima	$\delta_{r_{max}}$	± 21	$^\circ$
Efectividad del timón	τ	0.62	*Adim.*
Velocidad de crucero	V_c	100.0000	m/s
Velocidad de despegue	V_{lof}	50.8800	m/s
Velocidad de aproximación	V_a	54.1700	m/s
Densidad de crucero	ρ_c	0.9044	kg/m^3
Desnidad en la aproximación	ρ_a	1.1685	kg/m^3
Coef. Resistencia Crucero	C_{D_c}	0.0316	*Adim.*
Coef. Resistencia Aterrizaje	C_{D_a}	0.1294	*Adim.*
Distancia del motor al plano de simetría	d	3.1000	m

3.3.2. Criterio de estabilidad

Una aeronave es direccionalmente estable si esta es capaz de re-alinearse con la resultante del viento, siempre y cuando sea perturbada desde un vuelo nivelado.

$$N_\beta > 0$$
$$C_{n_\beta} > 0$$

En donde el coeficiente de momento de guiñada está dado por:

$$C_n = \frac{N}{qSb}$$
$$C_{n\beta} = \frac{\partial C_n}{\partial \beta}$$

Se asume que $C_{n\beta}$ es la suma de las contribuciones individuales causadas por el fuselaje, las alas y las superficies de la cola, cómo así también las contribuciones debida a la planta propulsora.

3.3.2.1 Contribución del ala

La contribución del ala de la aeronave a la estabilidad direccional depende de dos factores, estos son, el ángulo de diedro Γ y el ángulo de flecha Λ. Esto mismo se expresa matemáticamente como lo dado por la Expresión 32. Se recuerda que si el ala no tiene diedro y no tiene mucho ángulo de flecha, la contribución del ala no es tan significativa (Pamadi, 2004, p. 262).

$$\left(C_{n\beta}\right)_W = \left(C_{n\beta}\right)_{\Gamma,W} + \left(C_{n\beta}\right)_{\Lambda,W} \tag{32}$$

de la Expresión 32, la contribución por el ángulo de diedro Γ puede estimarse empleado la Expresión 33 y la contribución debido a la flecha Λ puede obtenerse mediante la Expresión 34 (U.S. Department of Defense, 1977).

$$\left(C_{n\beta}\right)_{\Gamma,W} = -0{,}075\Gamma C_L = -0{,}001501 \; [1/rad] \tag{33}$$

$$\frac{\left(C_{n\beta}\right)_{\Lambda,W}}{C_L^2} = \frac{1}{4\pi A} - \frac{\tan(\Lambda_{c/4})}{\pi A\,(A + 4\cos(\Lambda_{c/4}))} \times \left(\cos(\Lambda_{c/4}) - \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8\cos(\Lambda_{c/4})} - 6\bar{x}_a \frac{\sin(\Lambda_{c/4})}{A}\right) \tag{34}$$

$$\left(C_{n\beta}\right)_{\Lambda,W} = 0,000985 \; [1/rad]$$

finalmente, la contribución del ala resulta:

$$\left(C_{n\beta}\right)_W = -0{,}000516 \; [1/rad]$$

La contribución del diedro será desestabilizante, mientras que la contribución debida a la flecha es estabilizante.



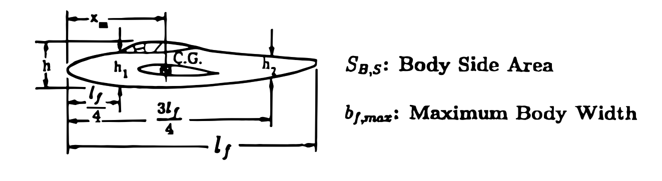
3.3.2.2 Contribución del fuselaje

La contribución del fuselaje es desestabilizante, se puede aproximar mediante la Expresión 35.

$$\left(C_{n\beta}\right)_B = -K_N K_{Rl} \left(\frac{S_{B,S}}{S}\right)\left(\frac{l_f}{b}\right)\ [1/deg] \tag{35}$$

en donde el factor K_N es un parámetro de carácter empírico por la interferencia existente entre el ala y el fuselaje y puede obtenerse mediante el gráfico de la Figura 37 en el cual se entra teniendo en cuenta algunos parámetros geométricos del fuselaje. El factor K_{Rl} es un parámetro empírico que es función del número de Reynolds basado en la longitud total del fuselaje l_f y fue obtenido mediante la Figura 38. Finalmente la contribución del fuselaje resulta:

$$\left(C_{n\beta}\right)_B = -0,161436\ [1/rad]$$



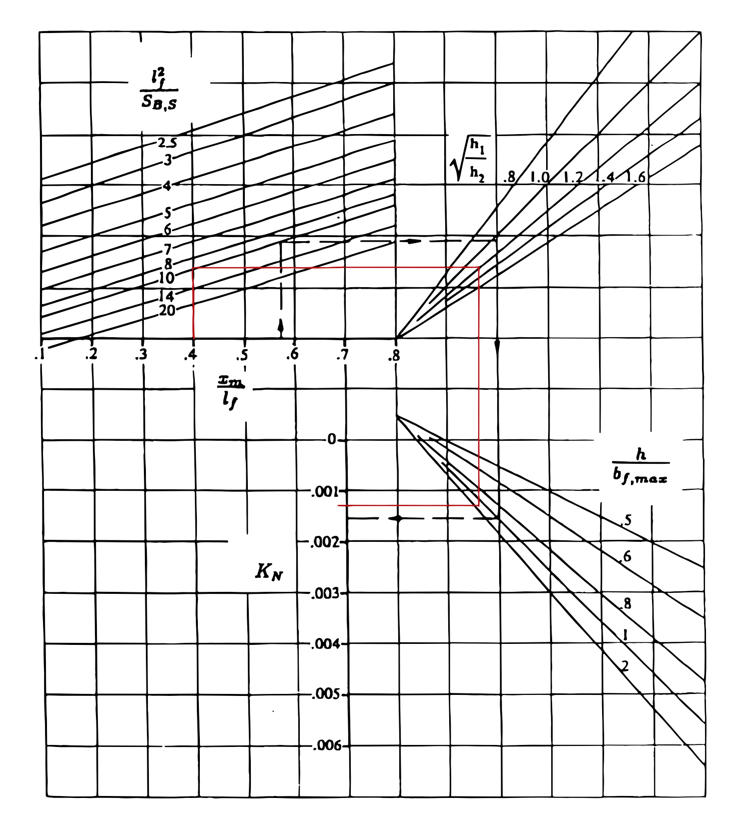


Figura 37: Obtención del factor K_N

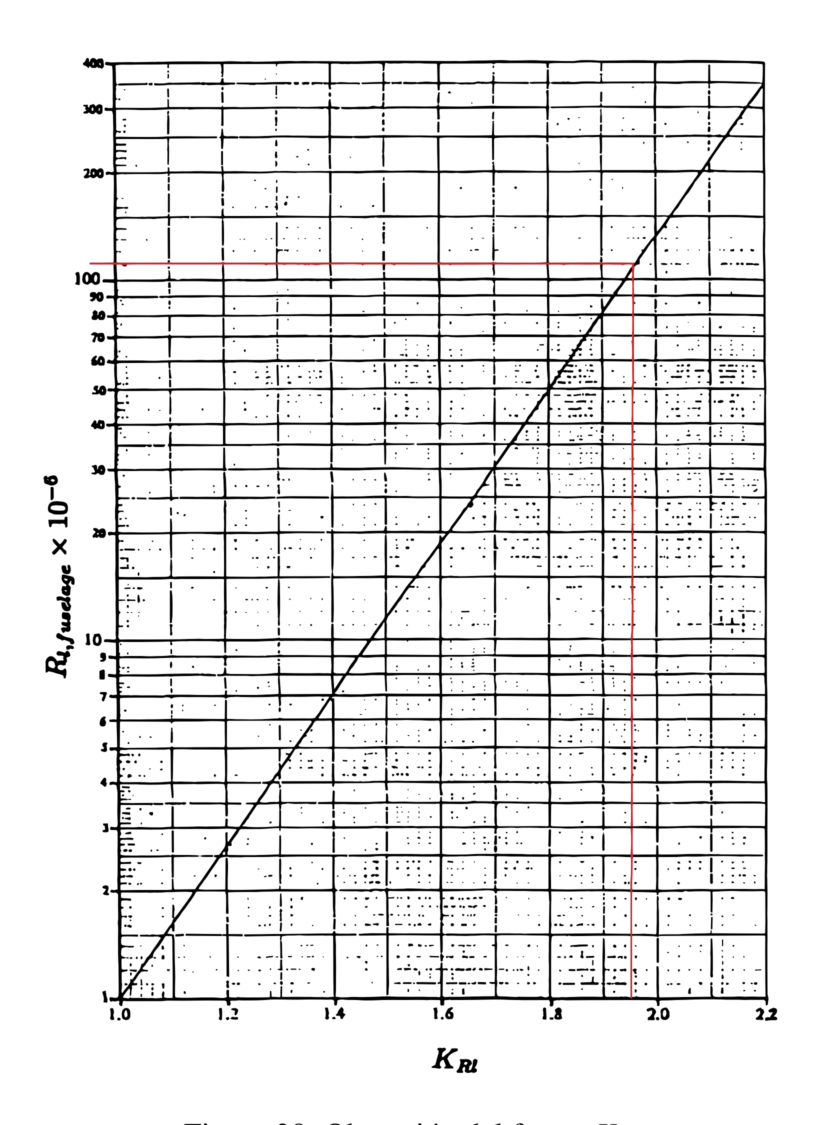


Figura 38: Obtención del factor K_{Rl}

3.3.2.3 Contribución del estabilizador vertical

El empenaje vertical, de forma análoga a lo que sucede en la estabilidad estática longitudinal, aporta la principal contribución para la estabilidad estática direccional de la aeronave. Dicha contribución puede ser estimada aplicando la Expresión 36.

$$(C_{n\beta})_F = \frac{\partial C_{\eta_F}}{\partial \beta} = -V_v \eta_v \frac{\partial C_{L_F}}{\partial \beta} = V_v a_F \eta_V \left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) = 0,460113\ [1/rad] \tag{36}$$

en donde *DATCOM* se introduce una formula empírica que permite obtener la influencia combinada del ala-fuselaje en el *sidewash* según:

$$\eta_V \left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) = 0{,}724 + 3{,}06 \frac{\frac{S_F}{S}}{1 + cos\Lambda_{\frac{c}{4}}} + 0{,}4 \frac{z_w}{d_{f,max}} + 0{,}009A = 1,306017$$

3.3.2.4 Contribución de la planta propulsora

El momento de guiñada producido por la fuerza normal en la hélice es calculado análogamente que el incremento de momento de cabeceo en la planta propulsora visto para la estabilidad estática longitudinal, en esta situación se tiene:

$$(C_{n\beta})_p = -\frac{l_p S_p}{b\, S} \frac{\partial C_{n_p}}{\partial C_{\alpha_p}} = -0,009174\ [1/rad]$$

en donde el termino $\frac{\partial C_{n_p}}{\partial \alpha_p}$ es el obtenido en la Figura 25.

3.3.2.5 Estabilidad Estática Direccional Total - Efecto Veleta

La derivada $C_{n\beta}$ total será la suma de cada una de las contribuciones desarrolladas y calculadas anteriormente, esto resulta lo dado en la Expresión 37.

$$\blacktriangleright\ \boxed{C_{n\beta} = 0,288988\ [1/rad]} \tag{37}$$

3.3.3. Potencia del timón

La principal superficie de control direccional es el *rudder* y su efectividad se cuantifica mediante el parámetro $C_{n\delta r}$, el cual se conoce como la potencia del *rudder* o del timón. Este parámetro es igual al coeficiente de momento de guiñada por unidad de deflexión del *rudder*. Se puede determinar mediante la Expresión 38.

$$\blacktriangleright\ \boxed{C_{n\delta r} = -\eta_v V_v a_r = -0,2184\ [1/rad]} \tag{38}$$

3.3.4. Viento cruzado admisible en el despegue

Durante el despegue, la presencia de viento cruzado puede generar un deslizamiento lateral en el avión, ya que el vector de velocidad resultante se aparta del plano de simetría de la aeronave. En casos donde la estabilidad direccional es positiva ($C_{n\beta} > 0$), la aeronave tiende a alinearse con la dirección del viento para corregir el deslizamiento. Sin embargo, esto puede plantear problemas de seguridad durante la carrera de despegue. Para contrarrestar este efecto, se requiere que el timón genere un momento de guiñada, esto se esquematiza en la Figura 39.

Buscamos estimar la velocidad de viento cruzado máxima $V_{cw,max}$ posible, teniendo en cuenta la deflexión máxima del rudder $\delta_{r,max}$ y el $C_{n\beta}$ a mando fijo. La deflexión del rudder para generar el ángulo de deslizamiento máximo posible se encuentra dada en la Expresión 39 (Ver (Pamadi, 2004, p. 281)).

$$\delta_{r,max} = -\frac{C_{n\beta}\, \beta_{max}}{C_{n\delta r}} \quad \rightarrow \quad \beta_{max} = -\frac{\delta_{r,max}\, C_{n\delta r}}{C_{n\beta}} = 15,87^\circ \tag{39}$$

Obtenido β_{max}, es posible calcular la velocidad del viento cruzado máximo mediante la Expresión 40. Teniendo en cuenta el valor de la velocidad de despegue calculado en la sección de *Performance* (Ver Sección 2.6.3), el valor del viento cruzado máximo resulta lo indicado en la Expresión 41.

$$\beta_{max} = \tan^{-1}\left(\frac{V_{cw,max}}{V_{lof}}\right) \quad \rightarrow \quad V_{cw,max} = \tan\left(\beta_{max}\right)\ V_{lof} \tag{40}$$

$$\blacktriangleright \quad \boxed{V_{cw,max} = 14,47\ [m/s]\ = 28,12\ [nudos]} \tag{41}$$

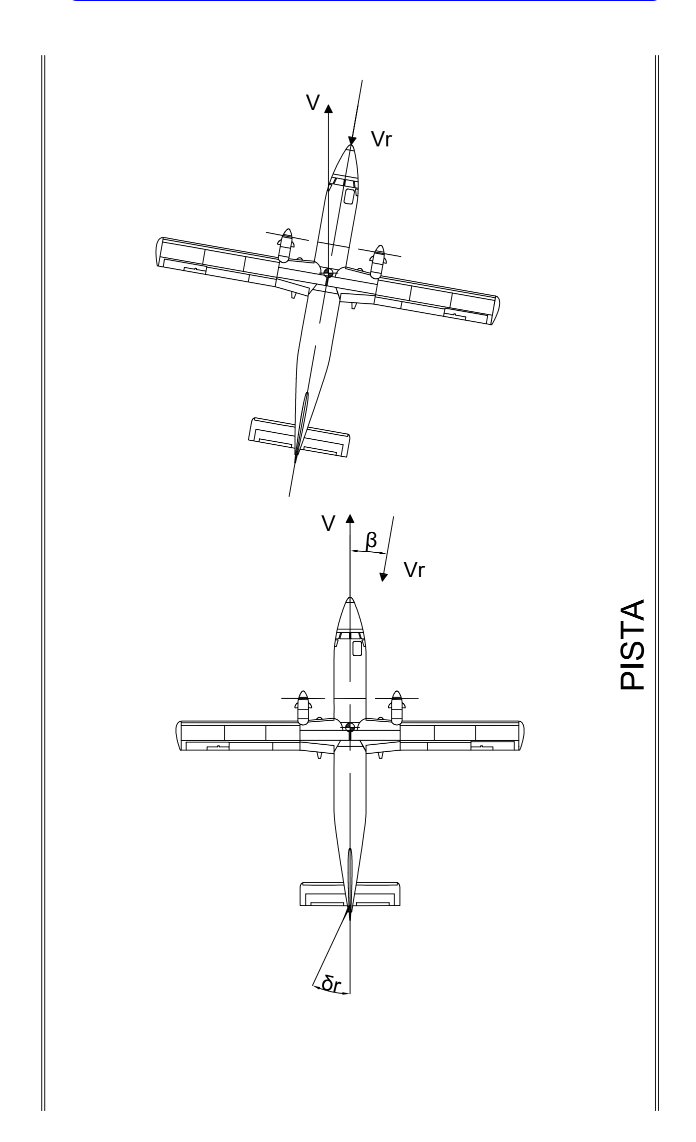


Figura 39: Diagrama esquemático del viento cruzado durante la maniobra de despegue. Con deflexión del timón nula y con deflexión del timón un ángulo δ_r.

3.3.5. Vuelo con un motor inoperativo

En aviones multimotor, la falla parcial de uno da lugar a una situación de potencia asimétrica que puede generar un momento de guiñada significativo, como se muestra esquemáticamente en la Figura 40. Si este momento de guiñada no es contrarrestado por el timón, la aeronave desarrollará un deslizamiento lateral, el timón debe estar diseñado para tener suficiente autoridad de control para mantener el vuelo controlado en tales condiciones.

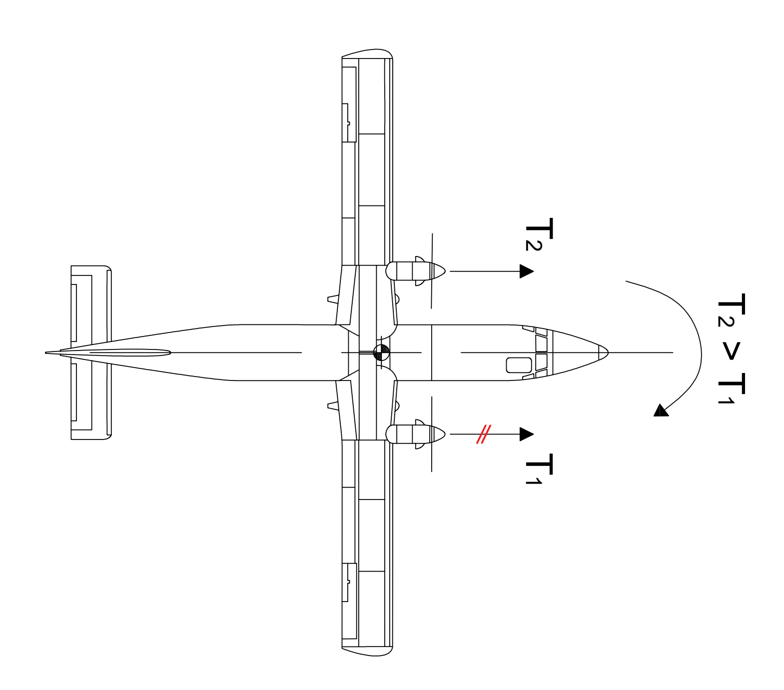


Figura 40: Efectos de potencia asimétrica

El propósito de esta sección es verificar que el timón pueda contrarrestar esta condición de potencia asimétrica en dos condiciones de vuelo, condición de crucero y condición de aterrizaje.

3.3.5.1 Condición de crucero

El momento de guiñada producido por el empuje asimétrico se encuentra dado por la siguiente:

$$N_T = T \cdot d$$

en donde el valor del empuje T es obtenido a partir de la curva polar en condición de crucero (Ver Sección 6.1) y d es la distancia del eje del motor al plano de simetría de la aeronave. El valor del momento de guiñada resulta:

$$N_T = 3306{,}15 \cdot 3{,}10 = 10249,08\ [Nm]$$

El momento de guiñada producido por la deflexión del *rudder* es:

$$N_r = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_{n\delta r}\delta_r$$

Por condición de equilibrio:

$$N_T + N_r = 0$$

Finalmente, la deflexión del *rudder* requerida para mantener el equilibrio se puede encontrar mediante la Expresión 42.

$$\blacktriangleright \quad \delta_r = \frac{-2N_T}{\rho_c V_c^2 S b C_{n\delta r}} = 1,10^\circ \tag{42}$$

3.3.5.2 Condición de aterrizaje

Para la condición de aterrizaje el procedimiento es análogo a la condición de crucero, se utiliza la curva polar de aterrizaje para la determinación del empuje. El momento de guiñada resulta:

$$N_T = 4741 \cdot 3{,}10 = 14696,85\ [Nm]$$

Finalmente teniendo en cuenta la condición de equilibrio, se determina el ángulo de deflexión del rudder requerido para mantener el equilibrio. La deflexión requerida resulta:

$$\blacktriangleright \quad \delta_r = \frac{-2N_T}{\rho_a V_a^2 S b C_{n\delta r}} = 4,05^\circ$$

3.3.6. Discusión

En esta sección se determinó la estabilidad estática direccional C_{n_β} de la aeronave a mando fijo siguiendo la metodología propuesta en la bibliografía (Pamadi, 2004; U.S. Department of Defense, 1977), se pudo verificar la condición de estabilidad direccional la cual fue descripta al inicio del tema ($C_{n_\beta} > 0$). Se puede concluir, teniendo en cuenta los resultados obtenidos que la aeronave es direccionalmente estable.

Se verificaron las condiciones de viento cruzado admisible en el despegue, los resultados obtenidos arrojan que la aeronave puede tolerar hasta 14.47 $[m/s]$ (equivalente a 28.12 $[kn]$) de viento cruzado; el fabricante de la aeronave informa que el valor máximo admisible es de 15.43 $[m/s]$ (equivalente a 30 $[kn]$). Se considera que el cálculo realizado arroja resultados satisfactorios.

Finalmente otro requerimiento verificado es el vuelo con un motor inoperativo, se determinó la deflexión del *rudder* requerida para poder mantener a la aeronave trimada direccionalmente. Los ángulos de deflexión requeridos obtenidos están dentro de las deflexiones posibles para el timón, resulta algo llamativo que los valores de dichos ángulos sean relativamente pequeños.

3.4. Estabilidad Estática Lateral

3.4.1. Introducción

En esta sección, se lleva a cabo el análisis de la *estabilidad lateral* de la aeronave asignada al grupo desde una perspectiva estática. El principal control sobre el *momento de rolido* lo proporciona la familia de alerones, ubicados cerca de las puntas de las alas. Al deflecionarse, aumentan la curvatura del ala, afectando la distribución de presiones y generando una variación en la sustentación que resulta en un momento de rolido. En la Figura 41, se presenta la distribución de carga en relación con la velocidad de rolido (Perkins y Hage, 1949).

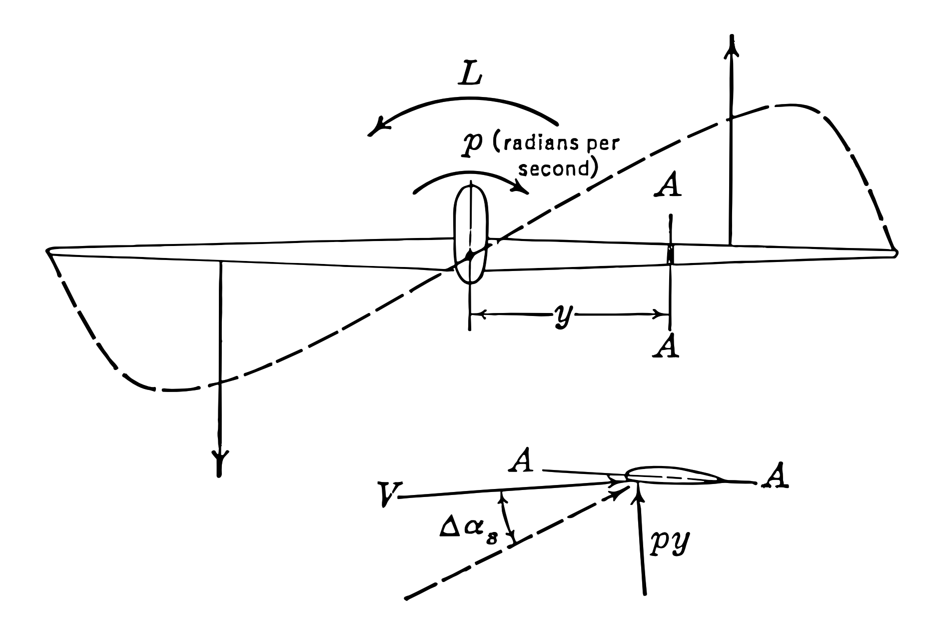


Figura 41: Distribución de carga debido a la velocidad de rolido

3.4.2. Criterio de estabilidad

Para que la aeronave sea estáticamente estable alrededor del eje x debe desarrollar un momento de rolido que restablezca el ángulo de inclinación original. El momento de rolido que se produce debido al deslizamiento se conoce como **efecto diedro** y el criterio para un efecto diedro estabilizante es:

$$C_{l_\beta} < 0$$

3.4.2.1 Contribución Ala - Fuselaje

La contribución del ala de la aeronave para la estabilidad lateral depende principalmente del ángulo de diedro Γ y el ángulo de flecha Λ, mientras que la contribución del fuselaje se ve reflejado por diferentes factores como se detalla en la Expresión 43 del método DATCOM:

$$\left(C_{\mathcal{L}_\beta}\right)_{W(B)} = C_L\left[\left(\frac{C_{\mathcal{L}_\beta}}{C_L}\right)_{\Lambda_{c/2}} K_{M\Lambda}K_f + \left(\frac{C_{\mathcal{L}_\beta}}{C_L}\right)_A\right] + \Gamma\left[\frac{C_{\mathcal{L}_\beta}}{\Gamma}K_{M\Gamma} + \frac{\Delta C_{\mathcal{L}_\beta}}{\Gamma}\right] + \left(\Delta C_{\mathcal{L}_\beta}\right)_{z_w} \tag{43}$$

Donde:

La contribución del ala debida a la flecha $\left(\frac{C_{\mathcal{L}_\beta}}{C_L}\right)_{\Lambda_{c/2}}$ se determina mediante la gráfica de la Figura 42:

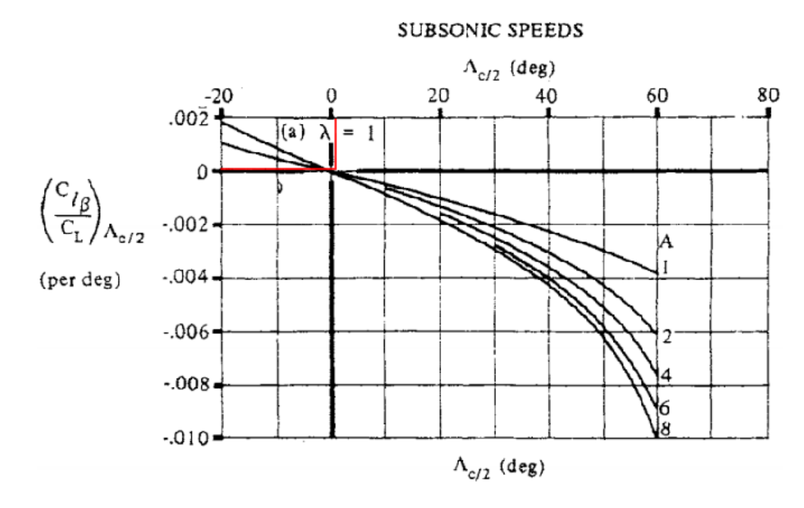


Figura 42: Contribución del ala debida a la flecha

$$\left(\frac{C_{\mathcal{L}_\beta}}{C_L}\right)_{\Lambda_{c/2}} = 0$$

La contribución debida al alargamiento $\left(\frac{C_{\mathcal{L}_\beta}}{C_L}\right)_A$ se determina empleando la gráfica de la Figura 43

$$\left(\frac{C_{\mathcal{L}_\beta}}{C_L}\right)_A = -0{,}001$$

Ahora, la contribución del ala debida al diedro $\frac{C_{l\beta}}{\Gamma}$ se obtiene de la gráfica de la Figura 44

$$\frac{C_{\mathcal{L}_\beta}}{\Gamma} = -0{,}00025$$

El factor $K_{M\Gamma}$ se determina mediante la gráfica de la Figura 45

$$K_{M\Gamma} = 1{,}04$$

Se obtienen las contribuciones finales de la interferencia ala-fuselaje:

$$\frac{\Delta C_{\mathcal{L}_\beta}}{\Gamma} = -0{,}0005\,\sqrt{A}\left(\frac{d}{b}\right)^2 = -0{,}00003 \tag{44}$$



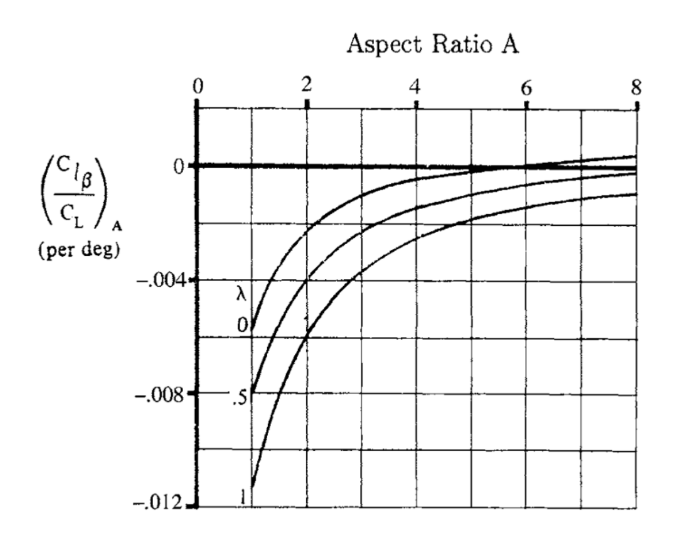


Figura 43: Contribución del ala debida al alargamiento

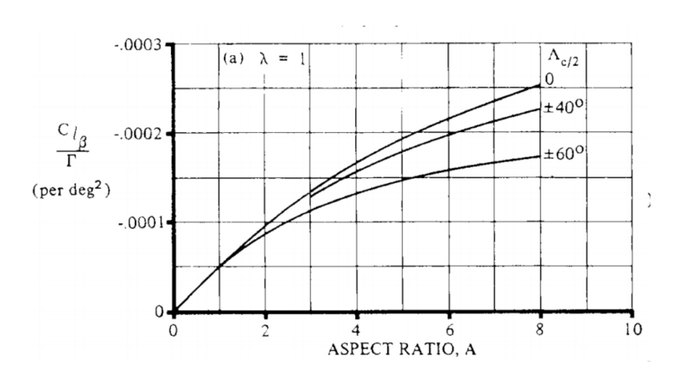


Figura 44: Contribución del ala debida al diedro

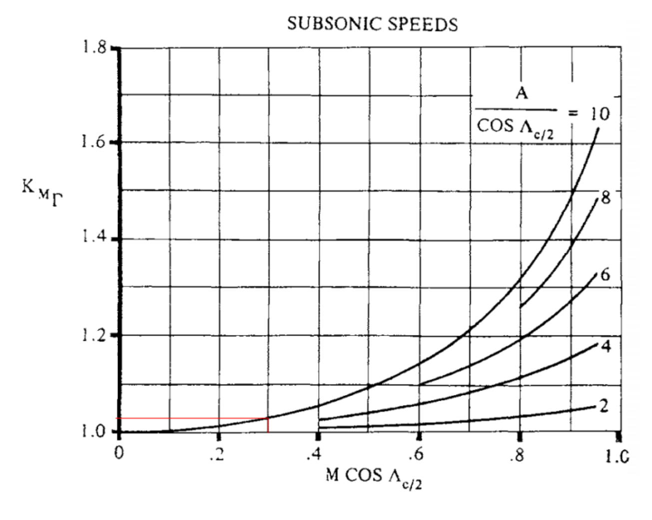


Figura 45: Correcciones por compresibilidad debida a diedro

Donde d es el ancho máximo del fuselaje.

$$\left(\Delta C_{\mathcal{L}_\beta}\right)_{z_w} = \frac{1{,}2\sqrt{A}}{57{,}3}\left(\frac{z_w}{b}\right)\left(\frac{2d}{b}\right) = -0{,}0012 \tag{45}$$

Donde z_w es la posición del ala relativa al eje x.

Reemplazando todas las contribuciones y correcciones obtenidas en la Expresión 43, se obtiene la contribución total del ala-fuselaje al efecto diedro, quedando:

$$\left(C_{\mathcal{L}_\beta}\right)_{W(B)} = -0{,}1488\ [1/rad]$$

3.4.2.2 Contribución del empenaje

La contribución del estabilizador vertical puede ser expresada como la Ecuación 46

$$\left(C_{\mathcal{L}_\beta}\right)_v = -\eta_v \frac{S_v}{S}\frac{z_v}{b} C_{L_{\alpha v}} \tag{46}$$

Donde la distancia z_v se indica en la gráfica de la Figura 46

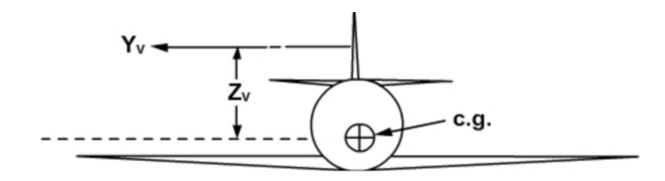


Figura 46: Posición del estabilizador vertical

Reemplazando los datos correspondientes del estabilizador vertical en la Expresión 46, se obtiene la contribución del estabilizador vertical:

$$\left(C_{\mathcal{L}_\beta}\right)_v = -0{,}1022\ [1/rad] \tag{47}$$

3.4.2.3 Estabilidad Estática Lateral Total - Efecto Diedro

La derivada C_{l_β} total será la suma de las contribuciones calculadas en las secciones anteriores, esto resulta lo dado en la Expresión 48.

$$\blacktriangleright\ \boxed{C_{\mathcal{L}_\beta} = -0{,}2510\ [1/rad]} \tag{48}$$



3.4.3. Potencia de alerones

Para obtener la Potencia de alerones se hace uso de la Expresión 49

$$C_{\mathcal{L}_{\delta_a}} = \frac{2\ a\ \tau_a}{S\ b} \int_{k_1\ \frac{b}{2}}^{k_2\ \frac{b}{2}} cydy \tag{49}$$

Donde k_1 y k_2 son las posiciones a lo largo de la envergadura de las estaciones límites del alerón,como se aprecian en la gráfica de la Figura 47 y τ_a es el factor de efectividad de los alerones.

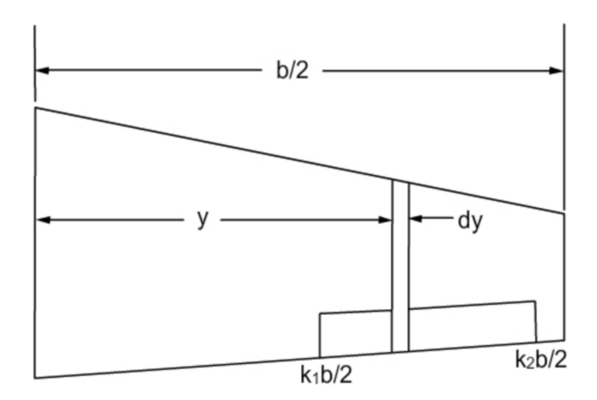


Figura 47: Parámetros del alerón

El resultado se obtiene mediante la integración numérica aplicando la Regla de Simpson haciendo uso de Python, reemplazando con los datos correspondiente del ala, se obtiene:

$$\blacktriangleright \boxed{C_{\mathcal{L}_{\delta_a}} = 0{,}3272\ [1/rad]} \tag{50}$$

3.4.4. Velocidad de rolido estacionaria

La velocidad de rolido estacionaria se alcanza cuando el momento debido a la deflexión de alerones iguala al momento de amortiguamiento debido a la propia velocidad de rolido.

3.4.4.1 Método NACA

Haciendo uso del método *NACA* propuesto en el *Report NACA TR 635*, se tiene la Ecuación 51 para obtener la velocidad de rolido estacionaria :

$$\frac{pb}{2V} = \frac{C_{\mathcal{L}_\delta}}{\tau} \frac{\tau\, \delta_a\, K}{114,6\, C_{\mathcal{L}_p}} \tag{51}$$

Donde los parámetros $\frac{C_{\mathcal{L}_\delta}}{\tau}$, $C_{\mathcal{L}_p}$, τ y K, se obtienen de las Figuras 48, 49, 50 y 51 respectivamente.

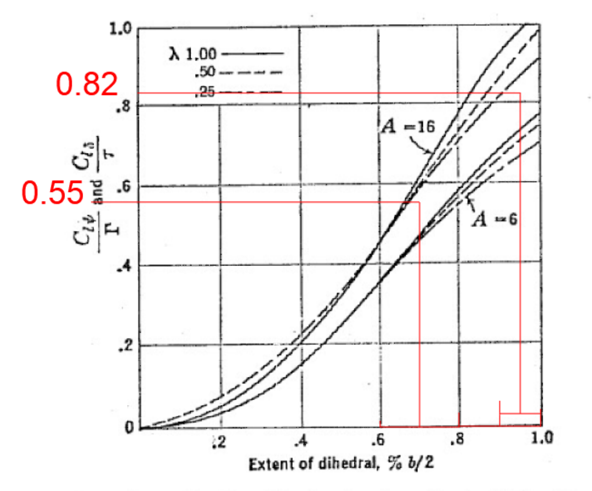


Figura 48: Parámetro $\frac{C_{\mathcal{L}_\delta}}{\tau}$

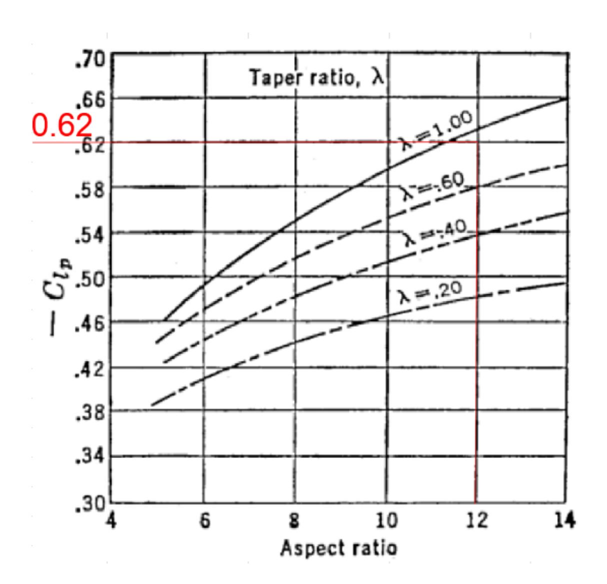


Figura 49: Parámetro $C_{\mathcal{L}_p}$

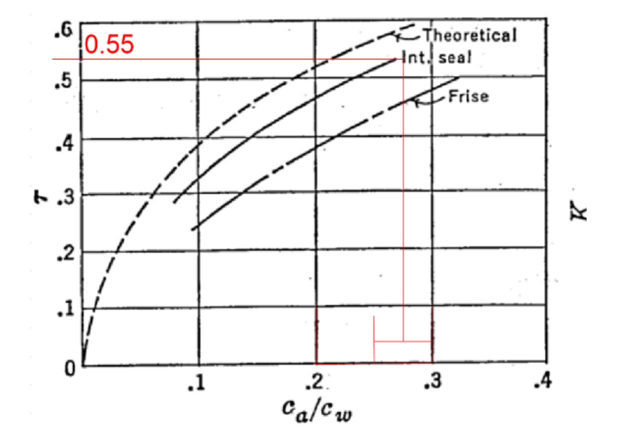


Figura 50: Efectividad del alerón

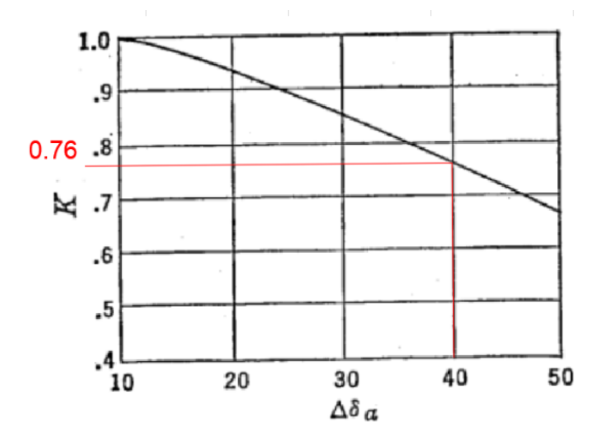


Figura 51: Corrección por deflexión del alerón

Como se aprecia en las imágenes, se obtienen los parámetros correspondientes:

$$\frac{C_{\mathcal{L}_\delta}}{\tau} = 0{,}27$$

$$C_{\mathcal{L}_p} = 0{,}62$$

$$\tau = 0{,}55$$

$$k = 0{,}76$$

Tomando en cuenta que la deflexión total del alerón δ_a es de 41° y reemplazando todos los parámetros obtenidos en la Expresión 51, se llega a la velocidad de rolido estacionaria:

$$\blacktriangleright \boxed{\frac{pb}{2V} = 0{,}06512} \tag{52}$$

Despejando de la ecuación 52, la velocidad de de rolido dimensional resulta:

$$p = 0{,}5713\ [rad/s] = 32{,}73\ [deg/s]$$

3.4.4.2 Método de integración por franjas

También se puede obtener la velocidad de rolido estacionaria haciendo uso de la Expresión 53

$$\frac{pb}{2V} = \frac{\tau_a \delta_a b}{2} \frac{\int_{k_1 \frac{b}{2}}^{k_2 \frac{b}{2}} cy\, dy}{\int_0^{\frac{b}{2}} cy^2\, dy} \tag{53}$$

La cual puede ser resuelta mediante la teoría de integración por franjas a partir de:

$$\frac{pb}{2V} = \frac{\delta_a^\circ \tau_a}{57{,}3} \frac{(3TR(k_2^2 - k_1^2) + (1 - TR)(k_2^3 - k_1^3))}{3 + TR} \tag{54}$$

Donde

$$TR = \frac{c_r}{c_t}$$

Y k_1 y k_2 son las posiciones a lo largo de la envergadura de las estaciones límites del alerón, como se puede ver en la Figura 47.

Se llega entonces a la velocidad de rolido estacionaria por el método de integración por franjas:

$$\blacktriangleright \boxed{\frac{pb}{2V} = 0{,}1271} \tag{55}$$



3.4.5. Discusión

En este apartado se logró determinar la estabilidad estática lateral de la aeronave $C_{\mathcal{L}_\beta}$ siguiendo la metodología DATCOM. Se comprobó el cumplimiento de la condición de estabilidad lateral presentada $C_{\mathcal{L}_\beta} < 0$, concluyendo así que la aeronave es lateralmente estable.

Para la determinación de la estabilidad estática lateral $C_{\mathcal{L}_\beta}$ se obtubieron las contribuciones tanto del ala como del empenaje vertical.

Así mismo se obtuvo la potencia de alerones $C_{\mathcal{L}_{\delta a}}$ y la Velocidad de rolido estacionaria adimensional. Esta última fue determinada mediante dos métodos, el Método NACA y el Método de integración por franjas. Se observó una discrepancia en los resultados obtenidos entre ambos métodos. Es importante destacar que el Método de Integración por Franjas, al no considerar efectos tridimensionales, tiende a proporcionar valores mayores, lo cual es normal. Por lo que se considera que los resultados son acertados.

4. Estabilidad Dinámica

4.1. Introducción

En las siguientes secciones, se abordará el análisis de la *estabilidad dinámica* de la aeronave asignada al grupo, el *Short 360*. Para llevar a cabo este análisis, se empleó la metodología propuesta por *Etkin* (Etkin y Reid, 1996) y para la estimación de las derivadas de estabilidad adimensionales se emplearon las metodologías propuestas por dicho autor y las metodologías presentada en el *DATCOM* (U.S. Department of Defense, 1977).

4.2. Estabilidad Dinámica Longitudinal

4.2.1. Introducción

En esta sección, se aborda el análisis de la respuesta dinámica longitudinal del *Short 360*, la aeronave asignada al grupo, para pequeñas perturbaciones. Siguiendo las metodologías recomendadas por la cátedra y las referencias bibliográficas (Etkin y Reid, 1996; U.S. Department of Defense, 1977), se estimaron las derivadas adimensionales longitudinales. Posteriormente, se calcularon las derivadas dimensionales y se construyó la matriz A, que permitió resolver el sistema dinámico. Los valores y vectores propios asociados a los dos modos longitudinales, el *fugoide* y el *corto período*, fueron finalmente obtenidos. Los datos empleados para resolver esta sección se encuentran dados en la Tabla 11.

Tabla 11: Datos necesarios - Estabilidad Dinámica Longitudinal

Parámetro	*Símbolo*	*Valor*	*Unidad*
Coeficiente de sustentación en crucero	C_L	0.4866	Adim.
Coeficiente de resistencia en crucero	C_D	0.0315	Adim.
Pendiente de la configuración completa	a	6.8687	$1/rad$
Pendiente de sustetentación del E.H.	a_t	4.3523	$1/rad$
Posición del C.G. en crucero	h	0.2650	Adim.
Densidad en el crucero	ρ	0.9044	kg/m^3
Punto neutro de mando fijo con potencia	h_n	0.5635	Adim.
Velocidad de crucero	u_0	100.0000	m/s
Mach en crucero	M	0.3045	Adim.
Volumen de cola	V_H	1.2182	Adim.
Distancia entre C.A. empenaje horizontal y C.G. del avión	l_t	10.5377	m
Cuerda Aerodinámica Media	$\bar{c}$	1.9900	m
Gradiente de Downwash	$d\epsilon/d\alpha$	0.3640	Adim.
Superficie alar	S	42.7300	m^2
Momento de inercia en y	I_y	121553	kgm^2
Ángulo de actitud en crucero	θ_0	0.0000	$^\circ$



4.2.2. Derivadas de estabilidad adimensionales

Se estimaron siguiendo la metodología desarrollada en la bibliografía de referencia (Ver (Etkin y Reid, 1996, p. 155)). Las fórmulas empleadas se encuentran sintetizadas en la Tabla 12.

Tabla 12: Derivadas longitudinales adimensionales

	C_x	C_z	C_m
u	$M\left(\frac{\partial C_T}{\partial M} - \frac{\partial C_D}{\partial M}\right) - \rho U_0^2 \frac{\partial C_D}{\partial p_d} + C_{T_u}\left(1 - \frac{\partial C_D}{\partial C_T}\right)$	$-M\left(\frac{\partial C_L}{\partial M}\right) - \rho U_0^2 \frac{\partial C_D}{\partial p_d} - C_{T_u}\frac{\partial C_L}{\partial C_T}$	0
α	$C_L - C_{D_\alpha}$	$-(C_{L_\alpha} + C_D)$	$-a(h_n - h)$
$\dot{\alpha}$	0	$-2a_t V_H \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}$	$-2a_t V_H \frac{l_t}{\bar{c}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}$
q	0	$-2a_t V_H$	$-2a_t V_H \frac{l_t}{\bar{c}}$

Considerando como despreciables las derivadas $C_{x_{\dot{\alpha}}}$, C_{x_q} y C_{m_u}, y asumiendo que los efectos aeroelásticos son despreciables, se obtuvieron los resultados presentados en la Tabla 13. En este análisis, para una aeronave turboprop, C_{T_u} se aproxima como $-3C_{T_0}$, donde $C_{T_0} = C_D + C_{w_0}\sin(\theta_0)$ y $C_{w_0} = \frac{W}{p_d \cdot S}$.

Tabla 13: Resultados de las derivadas adimensionales longitudinales

	C_x	C_z	C_m
u	-0,0946	-0,0497	0,0000
α	0,2480	-6,9002	-2,0505
$\dot{\alpha}$	0,0000	-3,8773	-20,5316
q	0,0000	-10,6519	-56,4055

4.2.3. Derivadas de estabilidad dimensionales

Posteriormente, al considerar la condición de vuelo crucero y los resultados de las derivadas adimensionales de estabilidad longitudinal, se determinaron las derivadas de estabilidad dimensionales siguiendo la formulación establecida en la Tabla 14.

Tabla 14: Derivadas Dimensionales Longitudinales

	X	Z	M
u	$\rho u_0 S C_{w_0} \sin\theta_0 + \frac{1}{2}\rho u_0 S C_{x_u}$	$-\rho u_0 S C_{w_0} \cos\theta_0 + \frac{1}{2}\rho u_0 S C_{z_u}$	$\frac{1}{2}\rho u_0 \bar{c} S C_{m_u}$
w	$\frac{1}{2}\rho u_0 S C_{x_\alpha}$	$\frac{1}{2}\rho u_0 S C_{z_\alpha}$	$\frac{1}{2}\rho u_0 \bar{c} S C_{m_\alpha}$
q	$\frac{1}{4}\rho u_0 \bar{c} S C_{x_q}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 \bar{c} S C_{z_q}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 \bar{c}^2 S C_{m_q}$
$\dot{w}$	$\frac{1}{4}\rho \bar{c} S C_{x_{\dot{\alpha}}}$	$\frac{1}{4}\rho \bar{c} S C_{z_{\dot{\alpha}}}$	$\frac{1}{4}\rho \bar{c}^2 S C_{m_{\dot{\alpha}}}$

Los resultados obtenidos se presentan de forma similar a la sección anterior en la Tabla 15.

Tabla 15: Resultados de las Derivadas Dimensionales Longitudinales

	X $[N]$	Z $[N]$	M $[Nm]$
u $[m/s]$	−182,7909	−1976,4991	0,0000
w $[m/s]$	479,1981	−13332,9156	−7884,5389
q $[rad/s]$	0,0000	−20479,2295	−215804,7807
$\dot{w}$ $[m/s^2]$	0,0000	−74,5446	−785,5293

4.2.4. Modos longitudinales

El sistema de ecuaciones de pequeñas perturbaciones para los modos longitudinales es el que se encuentra dado por la Expresión 56.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w}{m} & 0 & -g\cos(\theta_0) \\ \frac{Z_u}{-Z_{\dot{w}}+m} & \frac{Z_w}{-Z_{\dot{w}}+m} & \frac{Z_q+mu_0}{-Z_{\dot{w}}+m} & \frac{gm\sin(\theta_0)}{Z_{\dot{w}}-m} \\ \frac{M_u(Z_{\dot{w}}-m)-M_{\dot{w}}Z_u}{I_y(Z_{\dot{w}}-m)} & \frac{M_w(Z_{\dot{w}}-m)-M_{\dot{w}}Z_w}{I_y(Z_{\dot{w}}-m)} & \frac{M_q(Z_{\dot{w}}-m)-M_{\dot{w}}\left(Z_q+mu_0\right)}{I_y(Z_{\dot{w}}-m)} & \frac{M_{\dot{w}}gm\sin(\theta_0)}{I_y(Z_{\dot{w}}-m)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \quad (56)$$

De forma sintética puede ser expresado como se muestra en la Expresión 57.

$$\dot{x} = Ax \quad (57)$$

en donde x es el vector de estado y A es la matriz del sistema la cual posee valores constantes. Las soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden tienen la forma ya conocida como:

$$x(t) = X_0 e^{\lambda t}$$

En la solución X_0 es el vector propio y λ es el valor propio del sistema. En síntesis, solo habrán soluciones cuando se cumpla lo siguiente:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

El determinante de la expresión estipulada anteriormente dará como resultado la *ecuación característica* del sistema, la misma será un polinomio en términos de λ de cuarto orden y sus raíces serán los valores propios del sistema.

Aplicado al caso de estudio que se está tratando actualmente, la matriz A del problema, resulta la dada en la Expresión 58.

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}019066 & 0{,}049983 & 0{,}000000 & -9{,}806650 \\ -0{,}204568 & -1{,}379960 & 97{,}108858 & 0{,}000000 \\ 0{,}001322 & -0{,}055947 & -2{,}402957 & 0{,}000000 \\ 0{,}000000 & 0{,}000000 & 1{,}000000 & 0{,}000000 \end{bmatrix} \tag{58}$$

Su ecuación característica resulta:

$$\lambda^4 + 3{,}8020\lambda^3 + 8{,}8313\lambda^2 + 0{,}1979\lambda + 0{,}1301 = 0{,}0000$$

Calculando las raíces de la ecuación característica, se obtuvieron los siguientes valores propios:

$$\begin{aligned} \text{Modo Fugoide} \quad & \lambda_{1,2} = -0{,}0081 \pm 0{,}1216\, i \\ \text{Modo Corto Período} \quad & \lambda_{3,4} = -1{,}8929 \pm 2{,}2742\, i \end{aligned}$$

Vemos que los modos naturales son dos oscilaciones amortiguadas, una de período largo y ligeramente amortiguada (el Modo Fugoide) y la otra de período corto y fuertemente amortiguada (Modo de Corto Período). Los vectores propios asociados a los valores propios obtenidos son los siguientes:

$$X_{1,2} = \begin{bmatrix} -0{,}999058 + 0{,}0i \\ 0{,}041535 \pm 0{,}000670i \\ -0{,}001519 \pm 6{,}149161E - 05i \\ 0{,}001330 \pm 0{,}012396i \end{bmatrix} \qquad X_{3,4} = \begin{bmatrix} 0{,}013980 \pm 0{,}002377i \\ 0{,}999579 + 0{,}0i \\ -0{,}005250 \pm 0{,}023404i \\ 0{,}007215 \pm 0{,}003696i \end{bmatrix}$$

Obtenidos los vectores propios anteriores, los normalizamos de forma tal que $\theta = 1$. Para ello dividimos cada elemento de cada vector propio por el valor de θ. El resultado de esto último lo presentamos a continuación:

$$X_{1,2} = \begin{bmatrix} -8{,}5481 \pm 79{,}6778i \\ 0{,}4088 \pm 3{,}3068i \\ -0{,}0081 \pm 0{,}1216i \\ 1{,}0000 + 0i \end{bmatrix} \qquad X_{3,4} = \begin{bmatrix} 1{,}6686 \pm 0{,}5254i \\ 109{,}7428 \pm 56{,}2245i \\ -1{,}8929 \pm 2{,}2742i \\ 1{,}0000 + 0i \end{bmatrix}$$

Finalmente se expresan los vectores propios normalizados en su forma adimensional, para realizar dicha adimensionalización se sigue lo siguiente:



$$\hat{u} = \frac{u}{u_0}$$

$$\hat{w} = \frac{w}{u_0}$$

$$\hat{q} = \frac{q}{2 \cdot u_0/\bar{c}}$$

Los vectores propios normalizados adimensionales finalmente, son:

$$X_{1,2} = \begin{bmatrix} -0{,}0855 \pm 0{,}7968i \\ 0{,}0041 \pm 0{,}0331i \\ -0{,}0001 \pm 0{,}0012i \\ 1{,}0000 + 0i \end{bmatrix} \qquad X_{3,4} = \begin{bmatrix} 0{,}0167 \pm 0{,}0053i \\ 1{,}0974 \pm 0{,}5622i \\ -0{,}0188 \pm 0{,}0226i \\ 1{,}0000 + 0i \end{bmatrix}$$

Los vectores y valores propios son indeterminados en magnitud, por lo tanto, podemos multiplicarlos por cualquier número (real o complejo). En este caso, elegimos que la componente asociada a θ valga 1. De esta manera, las perturbaciones de velocidad u, ángulo de ataque w, y velocidad angular de cabeceo q mostrarán el ángulo de fase respecto al ángulo de actitud del avión y la magnitud relativa a un cambio unitario en el ángulo de actitud. Esto resulta útil porque puede visualizarse en un diagrama de fases, como se muestra en la Figura 52, los vectores propios pasados a forma polar se presentan en la Tabla 16.

Tabla 16: Vectores propios en forma polar

	Modo Fugoide		*Modo de Corto Período*	
	Módulo	*Fase*	*Módulo*	*Fase*
$\hat{u}$	0.8014	-96.1°	0.0175	17.5°
$\hat{w}$	0.0333	82.9°	1.2331	27.1°
$\hat{q}$	0.0012	-93.8°	0.0294	129.8°
θ	1.0000	0.0°	1.0000	0.0°

Los diagramas fasoriales de la Figura 52 permiten corroborar la teoría. En el modo fugoide, se considera un movimiento en el que la velocidad de cabeceo q y el ángulo de ataque $\alpha = \hat{w}$ son muy pequeños (y de no ser por la amplificación no serían percibidos en el diagrama), pero $\hat{u}$ y θ están presentes con una magnitud significativa. En cuanto al modo de corto período, las variaciones en velocidad son despreciables, mientras que el ángulo de ataque $\alpha = \hat{w}$ y θ están presentes con una magnitud significativa.

Finalmente empleando la expresión general de soluciones se construyeron los gráficos para las distintas variables de interés longitudinales, esto se presenta en las Figuras 53a y 53b.

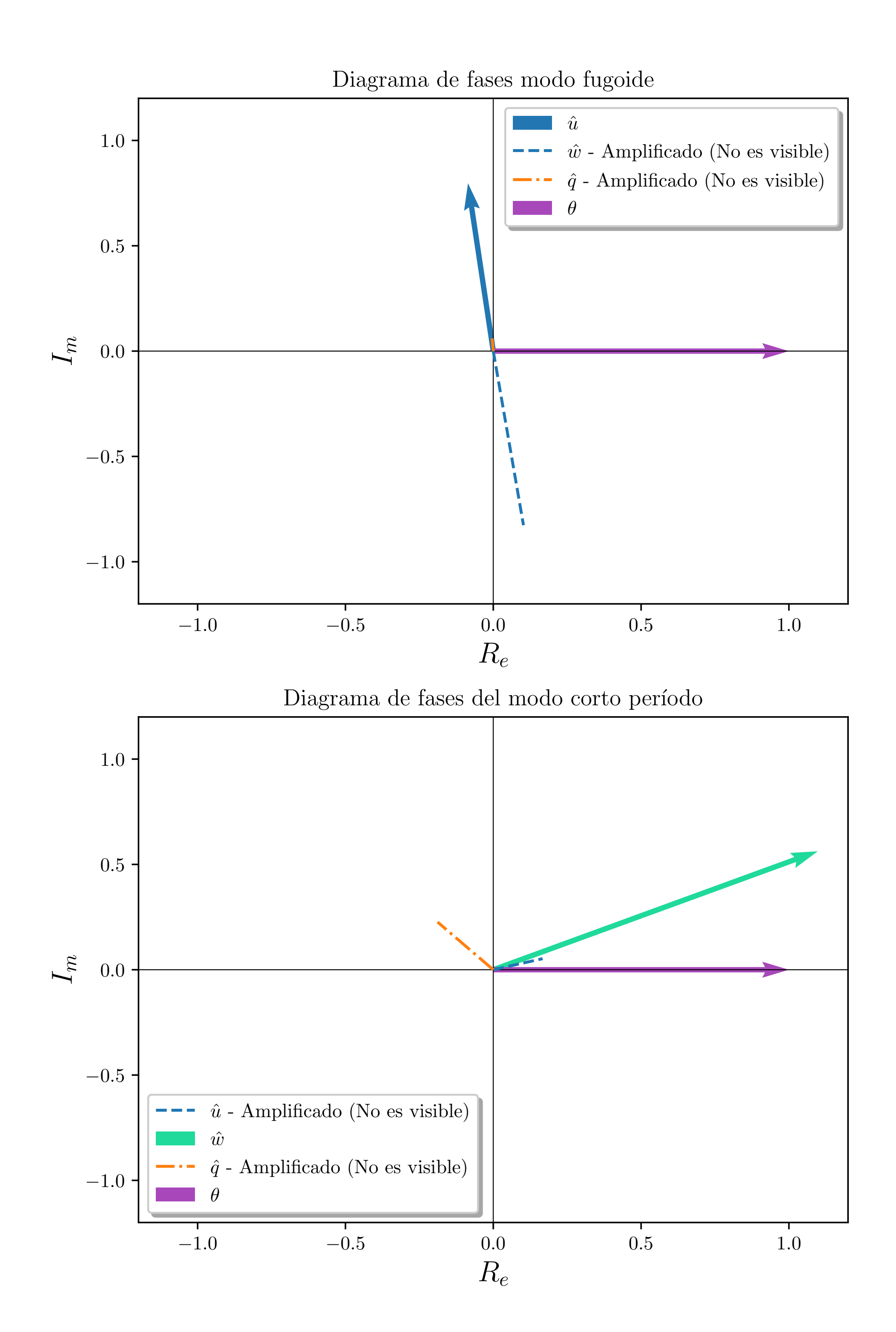
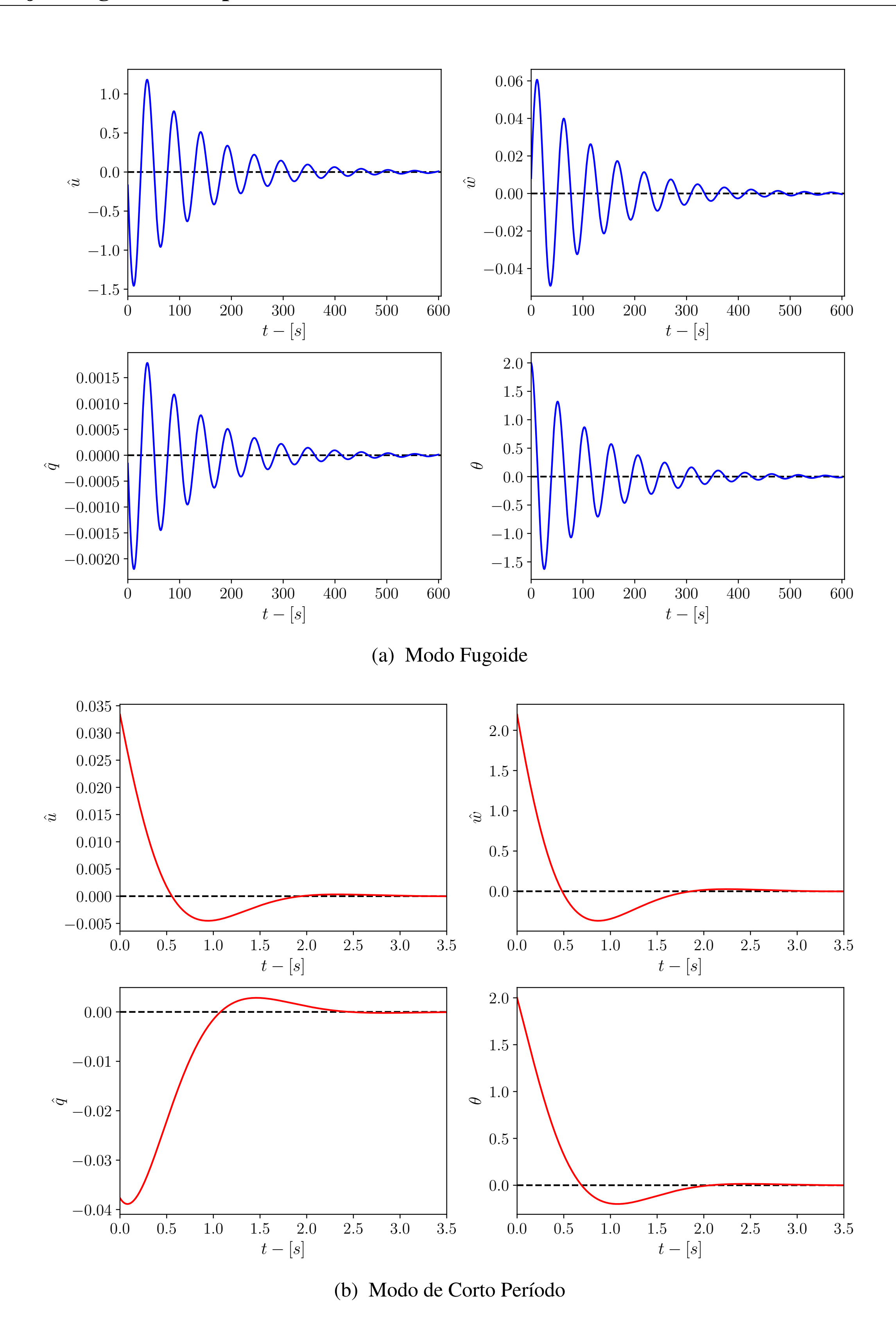


Figura 52: Diagramas fasoriales de los modos fugoide y corto período



(a) Modo Fugoide

(b) Modo de Corto Período

Figura 53: Modos longitudinales

Finalmente se determinaron los períodos, los amortiguamientos y tiempos de reducción a la mitad, los mismos se presentan en la Tabla 17.

Tabla 17: Períodos, amortiguamientos , tiempos de reducción a la mitad y número de ciclos para reducción a la mitad.

Modo	*Período* [s]	*Tiempo de reducción a la mitad* [s]	*Amortiguamiento* [-]
Fugoide	51.65	85.68	0.0664
Corto Período	2.76	0.37	0.6397

4.2.5. Modos longitudinales de orden reducido

- **Modelo de Lanchester:** En el modelo de Lanchester se desprecia el cambio de ángulo de ataque, y se cosidera que las fuerzas aerodinámicas no realizan trabajo en la dirección de la trayectoria. Esto se traduce en la conservación de la energía mecánica

  $$E = 1/2mV^2 - mgz_e$$

  De donde se obtiene la velocidad en términos de la velocidad de vuelo y su cambio de velocidad debido a la variaci´on de energía potencial gravitatoria.

  $$V^2 = u_o^2 + 2gz_e$$

  Relacionando L y W ,y reemplazando en las ecuaciones de movimiento se obtiene:

  $$W - Lcos(\gamma) \approx W - L = m\ddot{z}_e$$

  Donde vemos que la diferencia entre W y L es debida al cambio de velocidad por variación de la energía potencial gravitatoria y es proporcional a z_e, por lo que el sistema pasa a ser análogo a un sistema masa resorte sin amortiguamiento con rigidez de resorte equivalente igual a $k = C_{w_0}\rho g S$ y queda expresado como:

  $$m\ddot{z}_e + kz_E = 0$$

  y en donde el período T resulta:

  $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- **Modelo de orden reducido para modo fugoide:** En este modelo el momento de cabeceo se asume muy pequeño y que el avión se encuentra en una sucesión de equilibrios cuasiestáticos. De esta manera tenemos que $\dot{q} = 0$ y el sistema se reduce en un grado de libertad,



además teniendo en cuenta que $\theta_0 = 0$ se resuelve un problema de autovalores obteniéndose una cuadrática:

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

$$\begin{aligned}
A &= -u_0 M_w \\
B &= g M_u + \frac{u_0}{m}(X_u M_w - M_u X_w) \\
C &= \frac{g}{m}(Z_u M_w - M_u Z_w)
\end{aligned}$$

Además si consideramos que $Cm_u \approx 0$, se simplifica aún más:

- **Modelo de orden reducido de corto periodo:** Se asume que la velocidad se mantiene constante y se toma en consideración que m es mucho más grande que $Z_{\dot{w}}$ y que mu_o es mucho mayor que Z_q para simplificar las ecuaciones. Se llega a un polinomio característico de segundo grado.

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

$$B = -\left[\frac{Z_w}{m} + \frac{1}{I_y}(M_q + M_{\dot{w}} u_0)\right]$$

$$C = -\frac{1}{I_y}\left(u_0 M_w - \frac{M_q Z_w}{m}\right)$$

Resolviendo los modelos de orden reducido se obtuvieron los resultados presentados en la Tablas 18 y 19. Los valores propios obtenidos resultaron:

$$\begin{aligned}
\text{Modo Fugoide} \quad & \lambda_{1,2} = -0{,}0095 \pm 0{,}1419\, i \\
\text{Modo Corto Período} \quad & \lambda_{3,4} = -1{,}9062 \pm 2{,}3070\, i
\end{aligned}$$

Tabla 18: Modelo de orden reducido para Modo Fugoide

Parámetro	*Ecuaciones generales*	*Lanchester*	$\dot{q} = 0$
Frecuencia amortiguada [rad/s]	0,1216	0,1387	0,1419
Período [s]	51,6519	45,3038	44,2891
Relación de amortiguamiento	0,0664	-	0,0670
Tiempo 1/2 [s]	85,6806	-	72,7103

Tabla 19: Modelo de orden reducido para Modo de Corto Período

Parámetro	*Ecuaciones generales*	*Modelo de orden reducido*
Frecuencia amortiguada [rad/s]	2,2742	2,3070
Período [s]	2,7628	2,7236
Relación de amortiguamiento	0,6397	0,6370
Tiempo 1/2 [s]	0,3662	0,3636

4.2.6. Discusión

Analizando los resultados obtenidos se puede observar que los modos obtenidos se ajustan a lo esperado; uno de ellos presenta un período relativamente extenso y un amortiguamiento reducido, correspondiente al *Modo Fugoide*, mientras que el otro muestra un mayor amortiguamiento y un período corto, característico del *Modo de Corto Periodo*. Demostrando así que ante una perturbación este último se estabilizará mucho más rápido que el fugoide.

En ambos casos, se evidencia estabilidad dinámica, ya que la parte real de los valores propios asociados es negativa y como se pudo apreciar en las gráficas presentadas existe una evidente convergencia.

Comparando los resultados obtenidos con los modelos de orden reducido (Tablas 18 y 19 se percibe una destacada similitud numérica, enfatizando la significativa proximidad entre los valores obtenidos. Esta observación respalda y confirma la consistencia de los resultados calculados, subrayando así la confiabilidad de los mismos.

Las formulaciones matemáticas más sencillas de los modos de orden reducido nos permitieron obtener valiosas conclusiones. Al observar en particular el modo de corto período, se evidencia su fuerte influencia por M_q (c_{m_q}). A medida que este valor aumenta, la parte real, que se corresponde con el amortiguamiento, adquiere mayor importancia. La derivada c_{m_q} está vinculada al volumen de la cola V_H, y dado que el volumen de cola de la aeronave es significativo (superior a 1.20 [4]), es lógico que se manifieste un valor elevado de M_q. Además, la parte imaginaria (frecuencia) es considerable, posiblemente debido a que M_w (relacionado con c_{m_α}) también tiene un valor alto. En este caso, a medida que la derivada c_{m_α} aumenta, la parte imaginaria adquiere mayor magnitud. Es importante destacar que nuestro alto margen estático contribuye a obtener un c_{m_α} elevado.

[4]Dicho valor de volumen de cola es característico de aeronaves tipo regionales (*Turboprop Regional*), según indica el autor Schaufele en su libro, valores típicos para aeronaves de este tipo están comprendidos entre 0.83 y 1.47 (Schaufele, 2007, p. 147).



4.3. Estabilidad Dinámica transversal

4.3.1. Introducción

En la sección presente se aborda el análisis de la respuesta dinámica transversal para pequeñas perturbaciones de la aeronave *Short 360*. Siguiendo las metodologías recomendadas por la cátedra y las referencias bibliográficas (Etkin y Reid, 1996; Roskam, 1973), se determinaron las derivadas adimensionales laterales direccionales. Seguidamente se calcularon las derivadas dimensionales y se construyó la matriz A, que permitió resolver el sistema dinámico. Finalmente se obtuvieron los valores y vectores propios asociados a los modos laterales direccionales, el *modo de rolido puro*, el *modo de espiral (Spiral)*, el *modo de balanceo del holandés (Dutch roll)*. Los datos necesarios para la resolución de esta sección se encuentran en la Tabla 20.

Tabla 20: Datos necesarios - Estabilidad Dinámica Transversal

Parámetro	*Símbolo*	*Valor*	*Unidad*
Ángulo de diedro	Γ	3.0000	°
Coeficiente de sustentación en crucero	C_L	0.4866	Adim.
Coeficiente de resistencia en crucero	C_D	0.0315	Adim.
Densidad en el crucero	ρ	0.9044	kg/m^3
Velocidad de crucero	u_0	100.0000	m/s
Mach en crucero	M	0.3000	Adim.
Pendiente de sustentación E.V.	a_v	4.2288	$1/rad$
Superficie del E.V.	S_F	7.7300	m^2
Pendiente de la configuración completa	a	6.8687	$1/rad$
Alargamiento	A_r	12.1657	Adim.
Distancia l_v	l_v	10.7760	m
Distancia z_v	z_v	2.8140	m
Ángulo de incidencia de crucero	α	4.0606	°
Momento de inercia en x	I_x	104785	kgm^2
Momento de inercia en y	I_y	121553	kgm^2
Momento de inercia en z	I_z	210172	kgm^2
Envergadura del EH.	b_h	7.4800	m
Superficie del E.H.	S_h	9.8300	m^2

4.3.2. Derivadas adimensionales de estabilidad transversal

Las derivadas de estabilidad lateral direccional se obtuvieron siguiendo la metodología desarrollada en la bibliografía de referencia (Ver (Roskam, 1973)). Las fórmulas empleadas se detallan a continuación.

4.3.2.1 Derivadas con respecto a β

C_{Y_β}

La derivada C_{Y_β} total es la suma de las contribuciones correspondientes:

$$C_{Y_\beta} = C_{Y_{\beta W}} + C_{Y_{\beta_B}} + C_{Y_{\beta_v}} \tag{59}$$

La contribución del ala se determina a partir de la Expresión 60

$$C_{Y_{\beta W}} = -0{,}0001|\Gamma|57{,}3 \ [1/rad] \tag{60}$$

La contribución del fuselaje:

$$C_{Y_{\beta_B}} = -2K_i\left(\frac{S_0}{S}\right) \ [1/rad] \tag{61}$$

Donde S_0 es la sección transversal del fuselaje en x_0 donde se separa el flujo. x_0 se obtiene en función de x_1 como se aprecia en la Expresión 62 , el punto donde la pendiente $\frac{dS}{dx}$ del fuselaje tiene mayor valor negativo.

$$\frac{x_0}{l_b} = 0{,}378 + 0{,}527\frac{x_1}{l_b} \tag{62}$$

Y finalmente, la contribución del empenaje vertical:

$$C_{Y_{\beta_v}} = -C_{L_{\alpha v}}\eta_v\left(1 + \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right)\frac{S_v}{S} \ [1/rad] \tag{63}$$

$C_{\mathcal{L}_\beta}$ **y** C_{n_β}

La obtención de las derivadas $C_{\mathcal{L}_\beta}$ y C_{n_β} se detallan en los apartados de estabilidad estática lateral y direccional correspondientemente.

4.3.2.2 Derivadas con respecto a la velocidad de rolido p

C_{Y_p}

La derivada C_{Y_p} se obtiene mediante la Expresión 64, cuya contribución más significativa es la del empenaje vertical.

$$C_{Y_p} \approx C_{Y_{p_v}} = -2\frac{z_v cos(\alpha) - l_v sin(\alpha)}{b}C_{Y_{\beta_v}} \tag{64}$$

Donde la posición y distancia z_v y l_v se determina como lo muestra la Gráfica 54

$C_{\mathcal{L}_p}$

La derivada $C_{\mathcal{L}_p}$ total, se obtiene de la suma de las contribuciones del ala-fuselaje, empenaje horizontal y vertical.

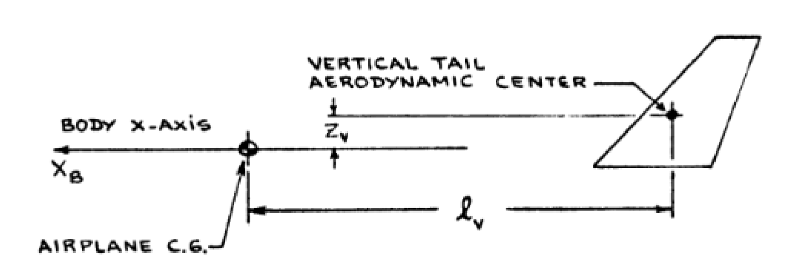


Figura 54: Parámetros de posición del empenaje vertical

La contribución del ala-fuselaje se determina con la Expresión:

$$C_{\mathcal{L}_{p_{WB}}} = \left(\frac{\beta C_{\mathcal{L}_p}}{\kappa}\right)\frac{\kappa}{\beta} \quad (65)$$

Donde:
El parámetro $\left(\frac{\beta C_{\mathcal{L}_p}}{\kappa}\right)$ se obtiene de la Gráfica 55.

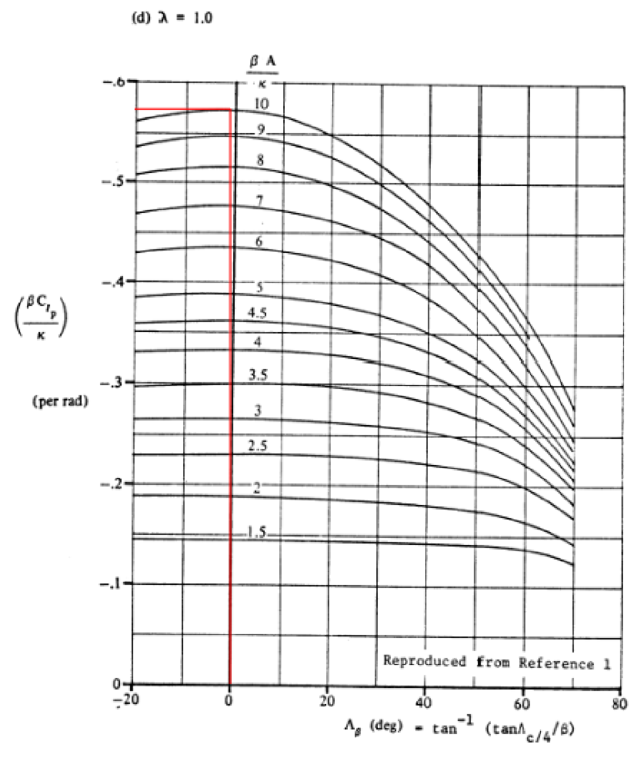


Figura 55: Parámetro $\left(\frac{\beta C_{\mathcal{L}_p}}{\kappa}\right)$

El parámetro κ es la relación entre la pendiente de sustentación 2D(del perfil) a la teórica:

$$\kappa = \frac{C_{l_\alpha}}{2\pi}$$

El parámetro β de Prandtl Glauert de corrección por compresibilidad, se definde como:

$$\beta = \sqrt{1 - M^2 cos^2(\Lambda_{0,25})}$$

La contribución del empenaje horizontal se determina con la siguiente expresión;

$$C_{\mathcal{L}_{p_H}} = 0{,}5 \left(C_{\mathcal{L}_{p_H}}\right) \frac{S_H}{S} \left(\frac{b_H}{b}\right)^2 \quad (66)$$

Donde la derivada $\left(C_{\mathcal{L}_{p_H}}\right)$ se obtiene con el mismo procedimiento de la contribución del ala-fuselaje que se detalló en el apartado anterior, cambiando los datos del ala con los del empenaje horizontal.

La contribución del empenaje vertical se calcula con la ecuación:

$$C_{\mathcal{L}_{p_v}} = 2 \left(C_{Y_{\beta_v}}\right) \left(\frac{z_v}{b}\right)^2 \quad (67)$$

C_{n_p}

La contribución más significativa para determinar la derivada C_{n_p} es la del ala, que se calcula con la Expresión 68

$$C_{n_{p_W}} = C_{\mathcal{L}_{p_W}} tan(\alpha) - \left(-C_{\mathcal{L}_p} tan(\alpha) - \left(\frac{C_{n_{p_W}}}{C_L}\right)_{C_L=0}\right) C_L \quad (68)$$

Donde:
C_L corresponde al coeficiente de sustentación en condición crucero y el parámetro $\left(\frac{C_{n_{p_W}}}{C_L}\right)_{C_L=0}$ se obtiene con la expresión siguiente:

$$\left(\frac{C_{n_{p_W}}}{C_L}\right)_{C_L=0} = -\frac{1}{6} \frac{AR + 6(AR + cos(\Lambda_{0,25}))\left(\frac{x_{cg}-x_{caw}}{MAC}\left(\frac{tan\Lambda_{0,25}}{AR} + \frac{tan^2\Lambda_{0,25}}{12}\right)\right)}{AR + 4cos(\Lambda_{0,25})} \quad (69)$$

4.3.2.3 Derivadas con respecto a la velocidad de guiñada r

C_{Y_r}

La principal contribución para obtener la derivada C_{Y_r} la realiza el empenaje vertical, con la expresión siguiente:

$$C_{Y_r} \approx C_{Y_{r_v}} = -2 \frac{l_v cos(\alpha) + z_v sin(\alpha)}{b} C_{Y_{\beta_v}} \quad (70)$$

C_{n_r}

La derivada C_{n_r} total se obtiene de la suma de las contribuciones del empenaje vertical y el ala.

La contribución del empenaje vertical se calcula con la siguiente expresión:

$$C_{n_{r_v}} = 2\frac{(l_v cos(\alpha) + z_v sin(\alpha))^2}{b^2} C_{Y_{\beta_v}} \tag{71}$$

Y la contribución del ala, se determina con la ecuación presentada a continución:

$$C_{n_{r_W}} = \left(\frac{C_{n_{r_W}}}{C_L^2}\right) C_L^2 + \left(\frac{C_{n_{r_W}}}{C_{D_0}}\right) C_{D_0} \tag{72}$$

Donde los términos $\left(\frac{C_{n_{r_W}}}{C_L^2}\right)$ y $\left(\frac{C_{n_{r_W}}}{C_{D_0}}\right)$ se obtienen de las Gráficas 56 y 57 correspondientemente.

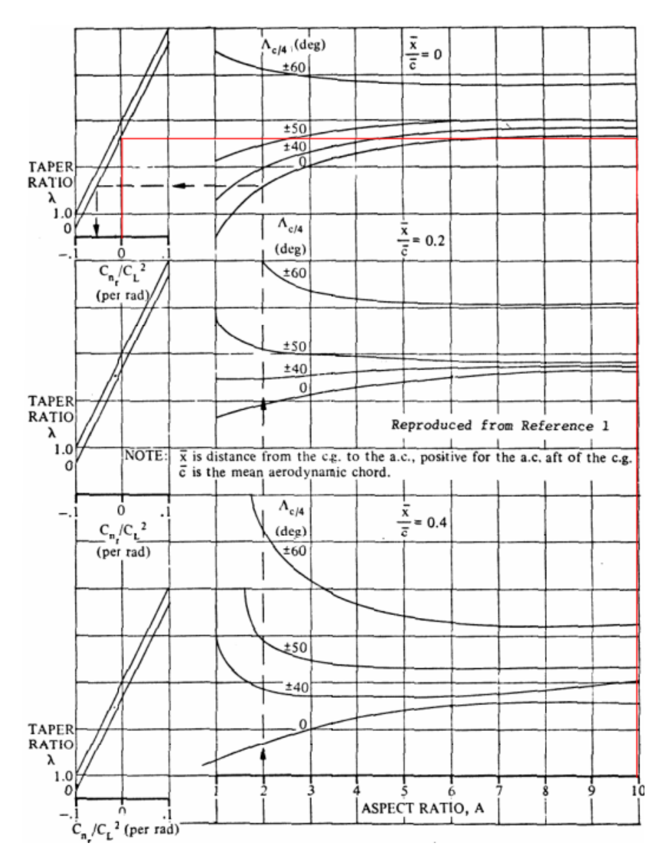


Figura 56: Parámetro $\left(\frac{C_{n_{r_W}}}{C_L^2}\right)$

$C_{\mathcal{L}_r}$

De la misma manera que en el inciso anterior, la derivada $C_{\mathcal{L}_r}$ es la suma de las contribuciones del empenaje vertical y el ala.

La contribución del empenaje vertidal se determjina como:

$$C_{\mathcal{L}_{r_v}} = 2\frac{(l_v cos(\alpha) + z_v sin(\alpha))(z_v cos(\alpha) - l_v sin(\alpha))}{b^2} C_{Y_{\beta_v}} \tag{73}$$

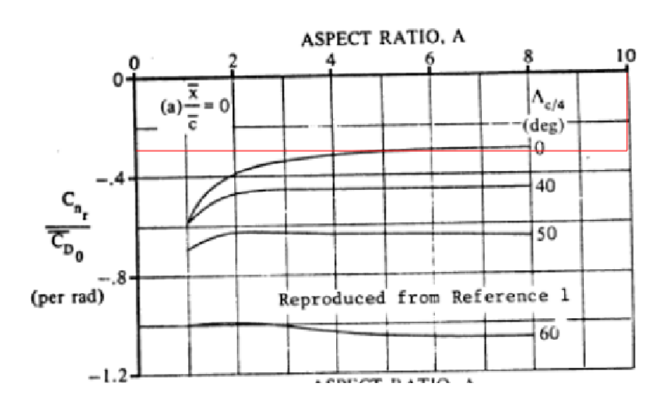


Figura 57: Parámetro$\left(\frac{C_{n_{rW}}}{C_{D_0}}\right)$

La contribución del ala se obtiene de la expresión siguiente:

$$C_{\mathcal{L}_{rW}} = \left(\frac{C_{\mathcal{L}_{rW}}}{C_L}\right)_{C_L=0} C_L + \left(\frac{\pi AR sen(\Lambda_{0,25})}{12(AR + 4cos(\Lambda_{0,25})}\right)\Gamma \tag{74}$$

Una vez calculadas todas las contribuciones de cada derivada, los resultados obtenidos se los presenta en la Tabla 21.

Tabla 21: Resultados de las derivadas adimensionales transversales

	$C_{\mathcal{Y}}$	$C_{\mathcal{L}}$	$C_{\mathcal{N}}$
β	-1,0358	-0,2510	0,2890
p	-0,4210	-0,5646	-0,0404
r	0,6719	0,1965	-0,3305



4.3.3. Derivadas dimensionales de estabilidad transversal

Considerando la condición de vuelo crucero y los resultados previamente obtenidos de las derivadas adimensionales de estabilidad transversal, se determinan las derivadas dimensionales de estabilidad transversal, haciendo uso de las expresiones detalladas en la Tabla 22.

Tabla 22: Derivadas Dimensionales Transversales

	Y	L	N
v	$\frac{1}{2}\rho u_0 S C_{y_\beta}$	$\frac{1}{2}\rho u_0 b S C_{l_\beta}$	$\frac{1}{2}\rho u_0 b S C_{n_\beta}$
p	$\frac{1}{4}\rho u_0 b S C_{y_p}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 b^2 S C_{l_p}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 b^2 S C_{n_p}$
r	$\frac{1}{4}\rho u_0 b S C_{y_r}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 b^2 S C_{l_r}$	$\frac{1}{4}\rho u_0 b^2 S C_{n_r}$

Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 23

Tabla 23: Resultados de las Derivadas Dimensionales Transversales

	$Y\ [N]$	$L\ [Nm]$	$N\ [Nm]$
$v\ [m/s]$	$-2001,4542$	$-11057,8837$	$12731,4570$
$p\ [rad/s]$	$-9273,4233$	$-282273,6729$	$-20315,2268$
$r\ [rad/s]$	$14800,1624$	$98673,2413$	$-165967,1161$

4.3.4. Modos transversales

El sistema de ecuaciones de pequeñas perturbaciones para los modos transversales se encuentra dado por la Expresión 75

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p}{m} & \frac{Y_r}{m} - u_0 & g\cos(\theta_0) \\ \frac{L_v}{I'x} + I'_{zx}N_v & \frac{L_p}{I'x} + I'_{zx}N_p & \frac{L_r}{I'x} + I'_{zz}N_r & 0 \\ \frac{N_v}{I'z} + I'_{zx}L_v & \frac{N_p}{I'z} + I'_{zx}L_p & \frac{N_r}{I'z} + I'_{zx}L_r & 0 \\ 0 & 1 & \tan(\theta_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} \tag{75}$$

La misma se puede expresar como:

$$\dot{x} = Ax$$

Donde la Matriz A para el caso de estudio actual se muestra en la Expresión 76

$$A = \begin{bmatrix} -0,2088 & -0,9673 & -98,4563 & 9,8067 \\ -0,1033 & -2,6956 & 0,9134 & 0,0000 \\ 0,0588 & -0,1439 & -0,7742 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \tag{76}$$

La ecuación característica se obtiene de la Expresión 77:

$$det(A - \lambda I) = 0 \tag{77}$$

Resolviendo la ecuación característica se obtienen cuatro autovalores, un par de valores complejos conjugados y dos reales, que conforman los modos de la aeronave en el análisis dinámico transversal: El par de valores complejos conjugados corresponde al modo denominado *Balanceo del Holandés*, mientras que el valor real más grande corresponde al modo *rolido puro* y el más chico es el correspondiente al *modo espiral*. Quedando:

- λ_1 correspondiente al modo espiral (Spiral)
- λ_2 correspondiente al modo rolido puro
- $\lambda_{3,4}$ correspondiente al modo de balanceo del holandés (Dutch roll)

4.3.4.1 Modo Balanceo del Holandés (Dutch Roll)

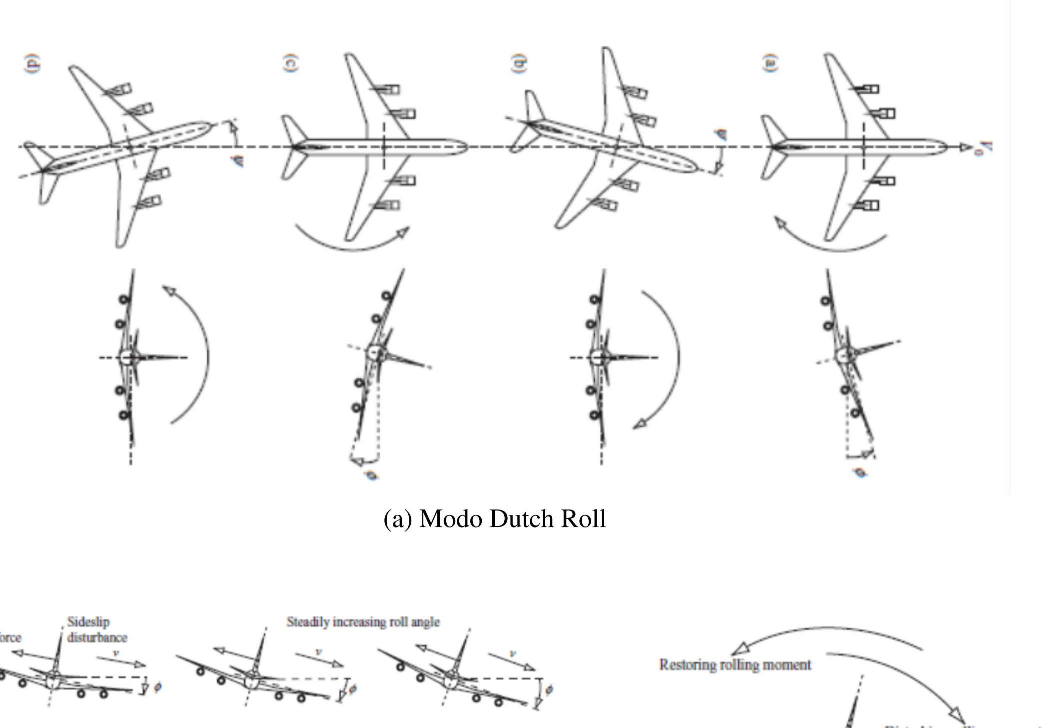
Como se aprecia en la Figura 58a es un modo oscilatorio con un gran acoplamiento entre el movimiento de guiñada y de rolido.

4.3.4.2 Modo Rolido Puro

Este modo tiene un comportamiento no oscilatorio y está desacoplado de los demás movimientos como se muestra en la Figura 58c Se encuentra expresado por un valor propio real y de valor absoluto relativamente grande. El amortiguamiento es generalmente grande.

4.3.4.3 Modo Espiral

El modo espiral es no oscilatorio y se caracteriza por ser un movimiento lento que involucra complicados movimientos de rolido, guiñada y deslizamiento (Ver Figura 58b). Tiene un valor propio real y de módulo pequeño. Físicamente el avión desarrolla un giro descendente a medida que su nariz cae con respecto a la horizontal.



(a) Modo Dutch Roll

(b) Modo Espiral

(c) Modo Rolido Puro

Figura 58: Modos transversales

Resolviendo la Expresión 77, se obtiene:

$$\lambda^4 + 3{,}6785\lambda^3 + 8{,}6324\lambda^2 + 18{,}5217\lambda + 0{,}2578 = 0 \tag{78}$$

Los valores propios que se obtienen a partir de la misma se expresan como:

$$\begin{aligned} \text{Modo Espiral} \quad \lambda_1 &= -0{,}014011 \\ \text{Modo Rolido Puro} \quad \lambda_2 &= -2{,}895677 \\ \text{Modo Balanceo del Holandés} \quad \lambda_{3,4} &= -0{,}384404 \pm 2{,}491387i \end{aligned}$$

Los vectores propios asociados a los valores propios obtenidos son los siguientes:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0{,}7729 + 0{,}0i \\ -0{,}0088 + 0{,}0i \\ 0{,}0615 + 0{,}0i \\ 0{,}6315 + 0{,}0i \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} -0{,}8874 + 0{,}0i \\ -0{,}4357 + 0{,}0i \\ -0{,}0050 + 0{,}0i \\ 0{,}1505 + 0{,}0i \end{bmatrix} \qquad X_{3,4} = \begin{bmatrix} -0{,}9992 + 0{,}0i \\ 0{,}0250 \pm 0{,}0172i \\ -0{,}0029 \pm 0{,}0246i \\ -0{,}0083 \pm 0{,}0088i \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidos los valores propios, se procede a normalizarlos respecto a ϕ y a adimencionalizarlos siguiendo:

$$\hat{v} = v/u_0 \qquad \hat{p} = p/(2u_0/b) \qquad \hat{r} = p/(2u_0/b)$$

Los mismos resultan:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0122 + 0{,}0i \\ -0{,}0016 + 0{,}0i \\ 0{,}0111 + 0{,}0i \\ 1{,}0000 + 0{,}0i \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} -0{,}0590 + 0{,}0i \\ -0{,}3301 + 0{,}0i \\ -0{,}0038 + 0{,}0i \\ 1{,}0000 + 0{,}0i \end{bmatrix} \qquad X_{3,4} = \begin{bmatrix} 0{,}5697 \pm 0{,}6036i \\ -0{,}0438 \pm 0{,}2840i \\ -0{,}1508 \pm 0{,}1794i \\ 1{,}0000 + 0{,}0000i \end{bmatrix}$$

Tomando los vectores propios normalizados adimencionalizados y utilizando la expresión general de solución se graficaron las variables de interés, esto se muestra en las Figuras 59, 60 y 61.

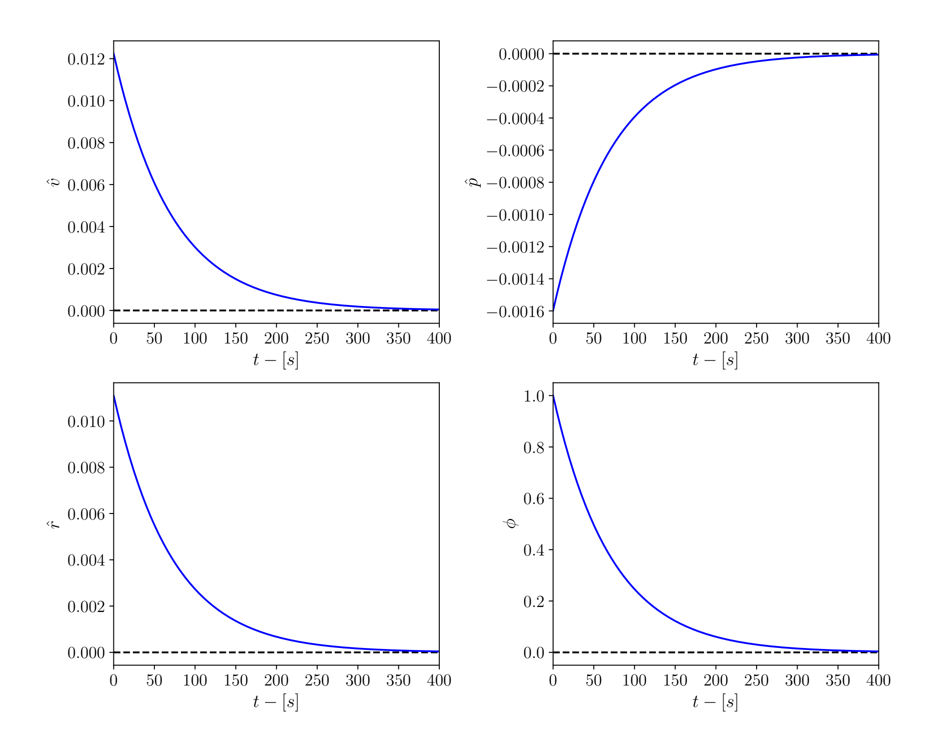


Figura 59: Modo Espiral

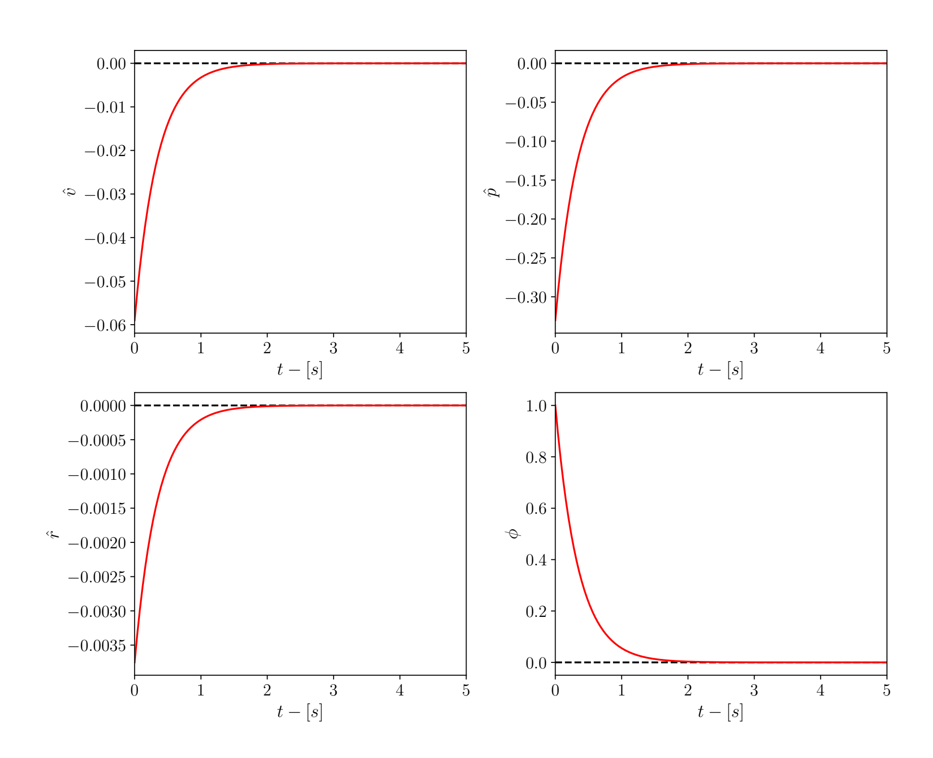


Figura 60: Modo de Rolido Puro

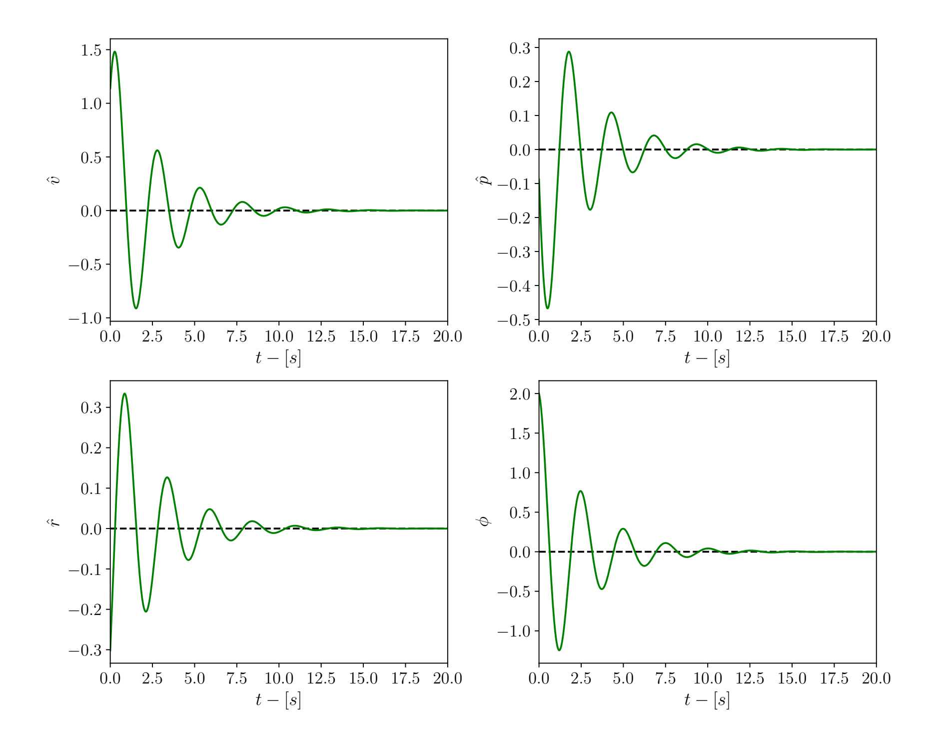


Figura 61: Modo Dutch Roll

Finalmente se determinaron los amortiguamientos, los periodos y tiempos de reducción a la mitad, los mismos se detallan en la Tabla 24

Tabla 24: Períodos, amortiguamientos , tiempos de reducción a la mitad y número de ciclos para reducción a la mitad.

Modo	*Período [s]*	*Tiempo de reducción a la mitad [s]*	*Amortiguamiento [-]*	*Frecuencia [rad/s]*
Modo espiral	-	49.4721	-	-
Modo de Rolido Puro	-	0.2394	-	-
Modo Dutch Roll	2.5220	1.8032	0.1525	2.4914

4.3.5. Modos trasversales de orden reducido

- **Modo espiral:** Una buena aproximación para estimar la raíz del modo espiral es la siguiente:

$$D\lambda + E = 0$$
$$\lambda_s = -E/D$$

$$E = -g\left[(\mathcal{L}'_v\mathcal{N}'_r - \mathcal{L}'_r\mathcal{N}'_v)\cos\theta_0 + (\mathcal{L}'_p\mathcal{N}'_v - \mathcal{L}'_v\mathcal{N}'_p)\sin\theta_0\right]$$
$$D = -g\,(\mathcal{L}'_v\cos\theta_0 + \mathcal{N}'_v\sin\theta_0) + u_0(\mathcal{L}'_v\mathcal{N}'_p - \mathcal{L}'_p\mathcal{N}'_v)$$

- **Modo de rolido puro:** Una buena aproximación para obtener la raíz del modo de rolido puro es la propuesta por *McRuer* en 1973. Con este modelo se pueden obtener dos raíces que corresponden a aproximaciones para el modo de rolido y para el modo espiral. La aproximación es la siguiente:

$$C\lambda^2 + D\lambda + E = 0$$

$$C = u_0\mathcal{N}'_v$$
$$D = u_0\left(\mathcal{L}'_v\mathcal{N}'_p - \mathcal{L}'_p\mathcal{N}'_v\right) - g\mathcal{L}'_v$$
$$E = g(\mathcal{L}'_v\mathcal{N}'_r - \mathcal{L}'_r\mathcal{N}'_v)$$

- **Modo de Dutch Roll:** Para el modo de *Dutch Roll*, se pueda aproximar al valor propio mediante la siguiente expresión:

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$



$$B = -(\mathcal{Y}'_v + \mathcal{N}'_r)$$
$$C = (\mathcal{Y}'_v \mathcal{N}'_r + u_0 \mathcal{N}'_v)$$

Resolviendo los modelos de orden reducido se obtuvieron los resultados presentados en la Tablas 25 y 26. Los valores propios obtenidos resultaron:

$$\text{Modo Espiral} \quad \lambda_1 = -0{,}014049$$
$$\text{Modo Rolido Puro} \quad \lambda_2 = -3{,}106657$$
$$\text{Modo Balanceo del Holandés} \quad \lambda_{3,4} = -0{,}491465 \pm 2{,}408434i$$

Tabla 25: Modelo de orden reducido para los modos espiral y de rolido puro

Modo Espiral		
Parámetro	*Ecuaciones generales*	*Modelo de orden reducido*
Amortiguamiento	0.0140	0.0141
Tiempo 1/2 [s]	49.4721	49.3383

Modo de Rolido Puro		
Parámetro	*Ecuaciones generales*	*Modelo de orden reducido*
Amortiguamiento	2.8957	3.1067
Tiempo 1/2 [s]	0.2394	0.2231

Tabla 26: Modelo de orden reducido para el modo del Dutch roll

Parámetro	*Ecuaciones generales*	*Modelo de orden reducido*
Frecuencia amortiguada [rad/s]	2,4914	2,4084
Período [s]	2,5220	2,6088
Relación de amortiguamiento	0,1525	0,1999
Tiempo 1/2 [s]	1,8032	1,4104

4.3.6. Discusión

Los resultados obtenidos indican que el comportamiento dinámico del avión es estable en relación con los modos principales, ya que en todo los casos, la parte real de los valores propios es negativa y como se aprecia en las gráficas existe una convergencia evidente alcanzada dentro de los plazos de tiempo esperados. Con la diferencia de que en el caso del modo Dutch Roll se tiene una solución convergente amortiguada, debido a sus raíces complejas conjugadas.



Cabe señalar que el Modo de Rolido Puro es el que tiene menor tiempo de convergencia ya que, como se esperaba, tiene el mayor módulo negativo y por lo tanto es altamente convergente.

Analizando las Tablas 25 y 26, se puede concluir que los resultados derivados de las ecuaciones generales exhiben una notoria similitud numérica con los obtenidos mediante el modelo reducido. Esta semejanza abarca tanto los valores de amortiguamiento como los de tiempo reducido a la mitad, en el caso de los Modos Espiral y Rolido puro; y de la misma forma se extiende al Modo Dutch Roll en cuanto a los valores de frecuencia y periodo. Este hallazgo respalda la confiabilidad de los resultados, consolidando la validez y coherencia de ambos enfoques.

De manera análoga al análisis realizado para el caso longitudinal, se examinó el caso transversal. El modo de rolido puro exhibe un amortiguamiento significativo. Al estudiar el modelo de orden reducido, se concluyó que a medida que el amortiguamiento de rolido $C_{\mathcal{L}p}$ aumenta en valor absoluto, el modo experimenta un incremento en el amortiguamiento. En nuestro caso, este valor puede ser considerable debido a que, en la estimación realizada mediante el método DATCOM, la pendiente de los perfiles alares del ala podría tener valores elevados, influyendo de manera significativa en los cálculos. En cuanto al *Dutch Roll*, la frecuencia del modo es alta, y en su modelo de orden reducido se observó que a medida que N_v (relacionado con C_{N_β}) aumenta, también lo hace la frecuencia del modo.

5. Conclusiones generales

A lo largo de este estudio se ha llevado a cabo un análisis exhaustivo de la aeronave *Short 360* abordando distintos aspectos.

En la primera etapa del estudio se analizó la *performance* de la aeronave, se determinaron distintos aspectos referido a esto y entre ellos se encuentran la determinación de la *envolvente de vuelo de la aeronave*, la determinación de los *parámetros de ascenso* como la tasa de ascenso *RC* y el gradiente de ascenso *CGR*, el análisis del comportamiento de la aeronave en *vuelo en maniobra* como sus velocidades de giro máximas y radios de giro mínimos, el estudio del *alcance y autonomía* y finalmente la determinación de las *distancias de despegue y aterrizaje*. Junto a esto fue posible verificar el cumplimiento de las normativas de aeronavegabilidad vigentes como también la comparación de los resultados obtenidos con lo provisto por el fabricante.

En la segunda etapa, nos sumergimos en un análisis detallado de la *Estabilidad Estática y Dinámica* de la aeronave. En el ámbito de la Estabilidad Estática, abordamos tanto la estabilidad longitudinal como la lateral/direccional. En la primera, identificamos las posiciones extremas del *C.G.*, trazamos la curva de sustentación en vuelo trimado y exploramos las relaciones entre el ángulo del elevador necesario para mantener el vuelo trimado y el ángulo de elevador requerido por g. Para la Estabilidad Estática Direccional y Lateral, determinamos las derivadas de estabilidad mas importantes y determinamos la potencia del timón, el viento cruzado máximo admisible en el despegue, el vuelo con un motor inoperativo, la potencia de los alerones y la velocidad de rolido estacionaria. Luego, al adentrarnos en la Estabilidad Dinámica, estimamos las derivadas de estabilidad tanto en el ámbito longitudinal como en el lateral/direccional. Obtuvimos con éxito los modos longitudinales y transversales, y se pudo verificar y confirmar el cumplimiento de los criterios de estabilidad tanto en el dominio estático como dinámico. Este análisis exhaustivo proporciona una comprensión integral de la capacidad del *Short 360* para mantener su estabilidad en diversas condiciones operativas.

Para concluir, el análisis detallado de la aeronave *Short 360* (Ver Figura 62) realizado a lo largo del curso ha sido una experiencia enriquecedora. La aplicación práctica de los conceptos aprendidos en la asignatura de *Mecánica del Vuelo* nos brindó una comprensión más profunda de los diversos aspectos que impactan en la performance y la estabilidad de una aeronave. Este estudio no solo cumplió con los objetivos académicos, sino que también resaltó la importancia de abordar la evaluación de aeronaves desde múltiples perspectivas.



Figura 62: Aeronave *Short 360*

Referencias

25.121. (2014). *§ 25.121 climb: One-engine-inoperative.* Code of Federal Regulations. Descargado de https://www.ecfr.gov/current/title-14/chapter-I/subchapter-C/part-25/subpart-B/subject-group-ECFR14f0e2fcc647a42/section-25.121

91.167. (2000). *Fuel requirements for flight in ifr conditions.* Code of Federal Regulations. Descargado de https://www.law.cornell.edu/cfr/text/14/91.167

ANAC. (2023, mar). Suplemento a la aip de la republica argentina. *ANAC - Aviación Civil*, p. 5. (Dirección nacional de inspección de navegación aérea, dirección regulación normas y procedimientos, departamento información aeronáutica)

Chawla, J. P. (1952, may). Empirical formulae for radii of gyration of aircraft. *Hughes Aircraft Company*.

Corner, A. (2023, aug). *Short 360.* Descargado de https://aerocorner.com/aircraft/short-360/

Cátedra de Aerodinámica I. (2021). *Aerodinámica i: Apuntes de la cátedra.* Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (FCEFyN).

doc8643.com. (2023, oct). *Technical data.* Descargado de https://doc8643.com/aircraft/SH36

EASA. (2019, jun). Type certificate - data sheet. *European Union Aviation Safety Agency*, *SD3 Series*, 20-34. Descargado de https://www.easa.europa.eu/en/downloads/99906/en

ESDU. (2012, feb). Average downwash at the tailplane. *ESDU*. Descargado de https://acortar.link/0oPy2

Etkin, B. (2005). *Dynamics of atmospheric flight* (first ed.). Dover Publications, Inc., 31 East 2nd Street, Mineola, N.Y. 11501: Dover Publications. INC.

Etkin, B., y Reid, L. D. (1996). *Dynamics of flight - stability and control* (third ed.). John Wiley & Sons, INC.

Far 25.113 - transport category airplanes: Structure. (1998). Descargado de https://www.law.cornell.edu/cfr/text/14/25.113

Lesher, E. (1940). Two formulas for take-off distance. *University of Michigan*. Descargado de https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/8.1087

Ojha, S. K. (1995). *Flight performances of aircraft.* AIAA education series.

Pamadi, B. N. (2004). *Performance, stability, dynamics, and control of airplanes* (second ed.). 1801 Alexander Bell Drive, Reston, VA 20191-4344: American Institute of Aeronautics and Astronautics.

Perkins, C. D., y Hage, R. E. (1949). *Airplane performance stability and control* (first ed.). John Wiley & Sons.

Pratt & Whitney. (2007). *Pt6a-60 series training manual.* Pratt & Whitney Canada, Inc.

Ribner, H. S. (1944, oct). *Notes on the propeller and slipstream in relation to stability* (NACA Report n.º L - 25). Langley Memorial Aeronautical Laboratory Langley Field, Va.: National Advisory Committee for Aeronautics - NACA. Descargado de https://ntrs.nasa.gov/citations/19930092551



Ribner, H. S. (1945, jan). *Formulas for propellers in yaw and charts of the side-force derivative* (NACA Report n.º NACA-TR-819). Langley Memorial Aeronautical Laboratory Langley Field, Va.: National Advisory Committee for Aeronautics - NACA. Descargado de https://ntrs.nasa.gov/citations/19930091896

Roskam, J. (1973). *Methods for estimating stability and control derivatives of conventional subsonic airplanes*. Roskam aviation and engineering Corporation.

Roskam, J., y Lan, C.-T. E. (1997). *Airplane aerodynamics and performance*. DARcorporation.

Saldía, J. P. (2023a, sep). *Estabilidad estática longitudinal - mando fijo* (Inf. Téc.). Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de Córdoba: Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (Diapositivas de clase)

Saldía, J. P. (2023b, aug). *Performance: Alcance y autonomía* (Inf. Téc.). Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de Córdoba: Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (Diapositivas de clase)

Saldía, J. P. (2023c, aug). *Performance: Despegue y aterrizaje* (Inf. Téc.). Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de Córdoba: Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (Diapositivas de clase)

Saldía, J. P. (2023d, aug). *Performance: Vuelo en maniobra* (Inf. Téc.). Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de Córdoba: Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (Diapositivas de clase)

Saldía, J. P. (2023e, aug). *Performance: Vuelo en trepada estacionario* (Inf. Téc.). Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de Córdoba: Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (Diapositivas de clase)

Schaufele, R. D. (2007). *The elements of aircraft preliminary design*. Aries Publications.

Sears, R. I. (1943, dec). *Wind - tunnel data on the aerodynamic characteristics* (NACA Report n.º NACA-WRL-663). Langley Memorial Aeronautical Laboratory Langley Field, Va.: National Advisory Committee for Aeronautics - NACA. Descargado de https://ntrs.nasa.gov/citations/19930092896

Short Brothers plc. (1985). *Flight manual sd3-60*. Belfast, Northren Ireland: Civil Aviation Authority of the United Kingdom.

Solies, U. P. (1994, nov). Numerical method for estimation of propeller efficiencies. *J. Aircraft, VOL. 31*(NO. 4), 996 - 998.

Taylor, J. (1981). *Jane's all the world's aircraft 1982- 83*. United Kingdom, 238 City Road, London EC1V 2PU.: Jane's Publishing Company Limited. (ISBN 7106-0729-6)

Torenbeek, E. (1982). *Synthesis of subsonic airplane design* (first ed.). Delf University Press.

U.S. Department of Defense. (1977). *Usaf stability and control - datcom*. (AD-A049-3)



6. Apéndice

6.1. Curva polar

La curva polar de resistencia de la aeronave se determinó para la condición de crucero y para la condición de baja velocidad, la mismas fueron obtenidas utilizando la metodología propuesta por Torenbeek (Torenbeek, 1982). En la Figura 63 se muestran una gráfica con las curvas polares para 3 condiciones de vuelo.

6.1.1. Curva polar de alta velocidad

Los resultados obtenidos por la metodología anteriormente mencionada son los que se muestran en la Tabla 27.

Tabla 27: Curva polar de alta velocidad

Componente	A	B	D
Resistencia por sustentacion de los componentes			
Resistencia Ala sin alabeo	0.0000000	0.0000000	0.0269491
Resistencia ala a sustentacion nula debida al alabeo	0.0000000	0.0000000	0.0000000
Resistencia por sustentacion del fuselaje	0.0006767	-0.0024257	0.0021739
Resistencia por sustentacion del empenaje	0.0007368	-0.0013129	0.0005848
Resistencia de perfil			
Resistencia del ala	0.0057728	-0.0042194	0.0052743
Resistencia del fuselaje - Upsweep	0.0099047	-0.0068000	0.0000970
Barquillas	0.0029641	0.0000000	0.0000000
Resistencia del empenaje horizontal	0.0002805	-0.0005000	0.0002230
Resistencia del empenaje vertical	0.0026281	0.0000000	0.0000000
Correcciones por interferencia			
Interferencia ala-fuselaje. Resistencia inducida por vortices	0.0004982	0.0000000	0.0000000
Interferencia ala-fuselaje. Resistencia viscosa	0.0003350	-0.0003001	0.0000000
Interferencia avion-empenaje	0.0000000	0.0003106	-0.0002767
Barquillas	0.0000000	0.0069520	0.0000000
Protuberancias, imperfecciones superficiales, etc			
Carenado tren principal	0.0007336	0.0000000	0.0000000
Montantes ala	0.0001812	0.0000000	0.0000000
Ala	0.0003464	-0.0002532	0.0003165
Fuselaje + Empenaje	0.0000474	-0.0001698	0.0001522
Superficies de control	0.0009315	-0.0001249	0.0000556
Instalaciones	0.0000474	-0.0001698	0.0001522
TOTAL	0.0260844	-0.0090132	0.0357017



6.1.2. Curva polar de baja velocidad

Los resultados obtenidos por la metodología anteriormente mencionada son los que se muestran en la Tabla 28.

Tabla 28: Curvas polares de baja velocidad (para despegue y aterrizaje)

Curva polar de despegue con $\delta_f = 15°$			
Componente	**A**	**B**	**D**
Curva polar de alta velocidad	0.026084	-0.009013	0.035702
Resistencia de perfil	0.003275	-0.003207	0.000000
Resistencia vorticosa	0.011199	-0.003151	0.000000
Resistencia de trimado	0.001368	0.000033	0.000000
Resistencia por tren de aterrizaje	0.009209	-0.003357	0.000306
TOTAL	0.051135	-0.018695	0.036008

Curva polar de aterrizaje con $\delta_f = 30°$			
Componente	**A**	**B**	**D**
Curva polar de alta velocidad	0.02608	-0.00901	0.03570
Resistencia de perfil	0.00864	-0.00552	0.00000
Resistencia vorticosa	0.01929	-0.00543	0.00000
Resistencia de trimado	0.00270	0.00007	0.00000
Resistencia por tren de aterrizaje	0.00229	-0.00167	0.00031
TOTAL	0.05900	-0.02157	0.03601

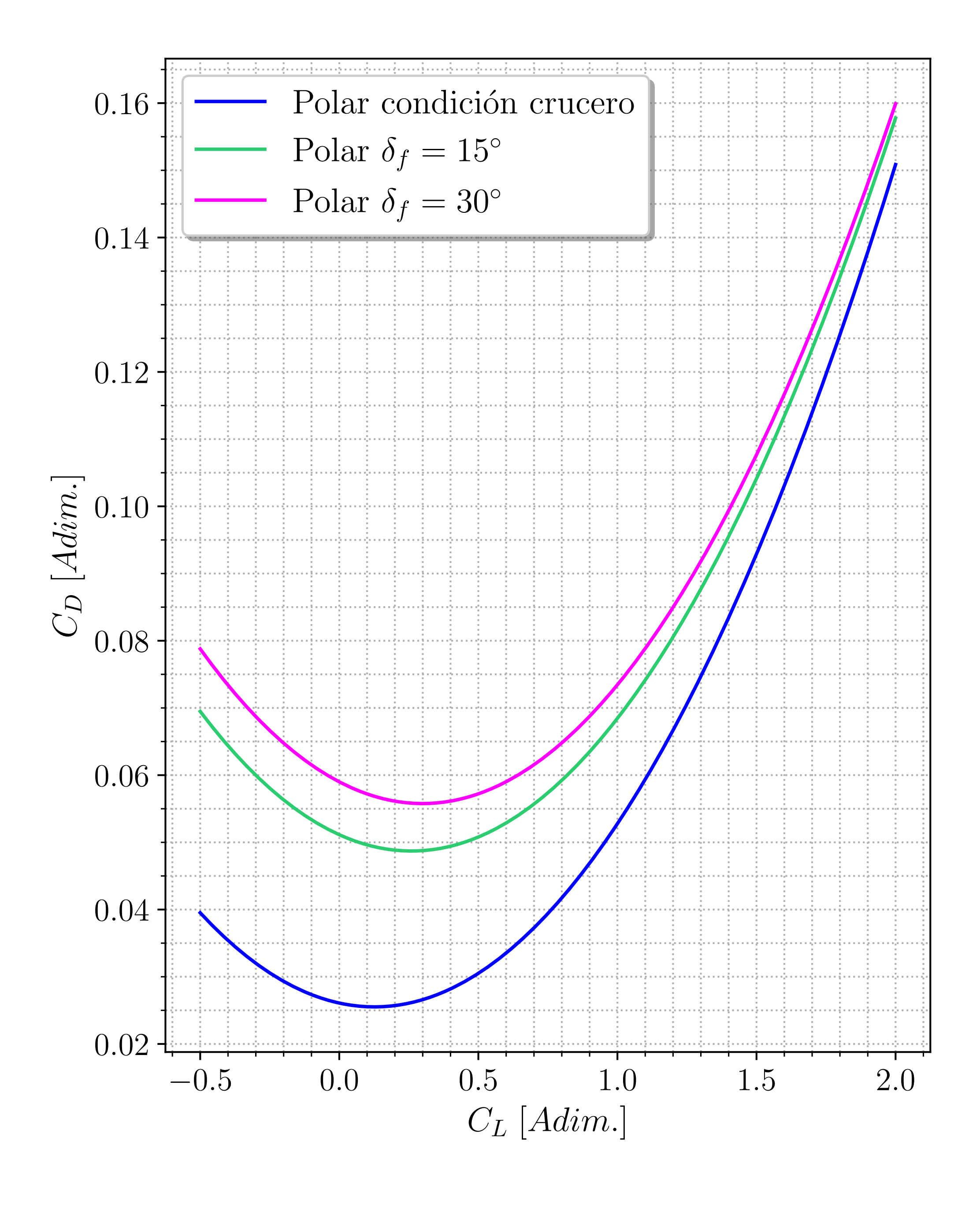


Figura 63: Curva polar de resistencia para tres condiciones de vuelo

6.2. Curva de potencia de los motores

La aeronave está equipada con motores Pratt & Whitney PT6-65R de la serie PT6-60. Tanto en el manual del fabricante de la aeronave como en los manuales del fabricante del motor, se pueden encontrar curvas, como se muestra en la Figura 64 (Ver Ref. (Pratt & Whitney, 2007)).

Estas curvas indican que, para motores de la serie PT6-60, el torque en $[lbs - ft]$ proporcionado por el motor es constante a una presión atmosférica específica, expresada en pulgadas de mercurio $[in - Hg]$. Conforme aumenta la altitud y disminuye la presión atmosférica, el motor es capaz de entregar un porcentaje reducido de su torque máximo, como se espera de acuedo a lo visto en la teoría.

Utilizando la información proporcionada por el fabricante del motor acerca del valor máximo de torque que el motor puede generar, hemos podido derivar una expresión que relaciona el torque del motor con la altitud (Ver Expresión 79).

$$T = -0{,}0897 \cdot h + 3625 \; [lb \cdot feet] \tag{79}$$

Para calcular la potencia en el eje del motor, necesitamos tener en cuenta las RPM especificadas por el fabricante de la aeronave, que son 1300 RPM. Dado que la aeronave tiene dos motores, debemos considerar este factor. Además, al realizar las conversiones adecuadas para pasar de $[lbs - ft]$ a $[Nm]$ y convertir las RPM a $[rad/seg]$, podemos obtener la potencia en el eje del motor como se muestra en la Expresión 80:

$$P_{eje} = 2 \cdot T \left(\frac{2\pi}{60} \cdot 1{,}3558 \cdot 1300 \right) [\text{Watts}] \tag{80}$$

en donde

2	Cantidad de motores
$\frac{2\pi}{60}$	factor de conversión para pasar de RPM a $[rad/seg]$
1.3558	factor de conversión para pasar de $[lbs - ft]$ a $[Nm]$
1300	Revoluciones por minuto del motor [RPM]

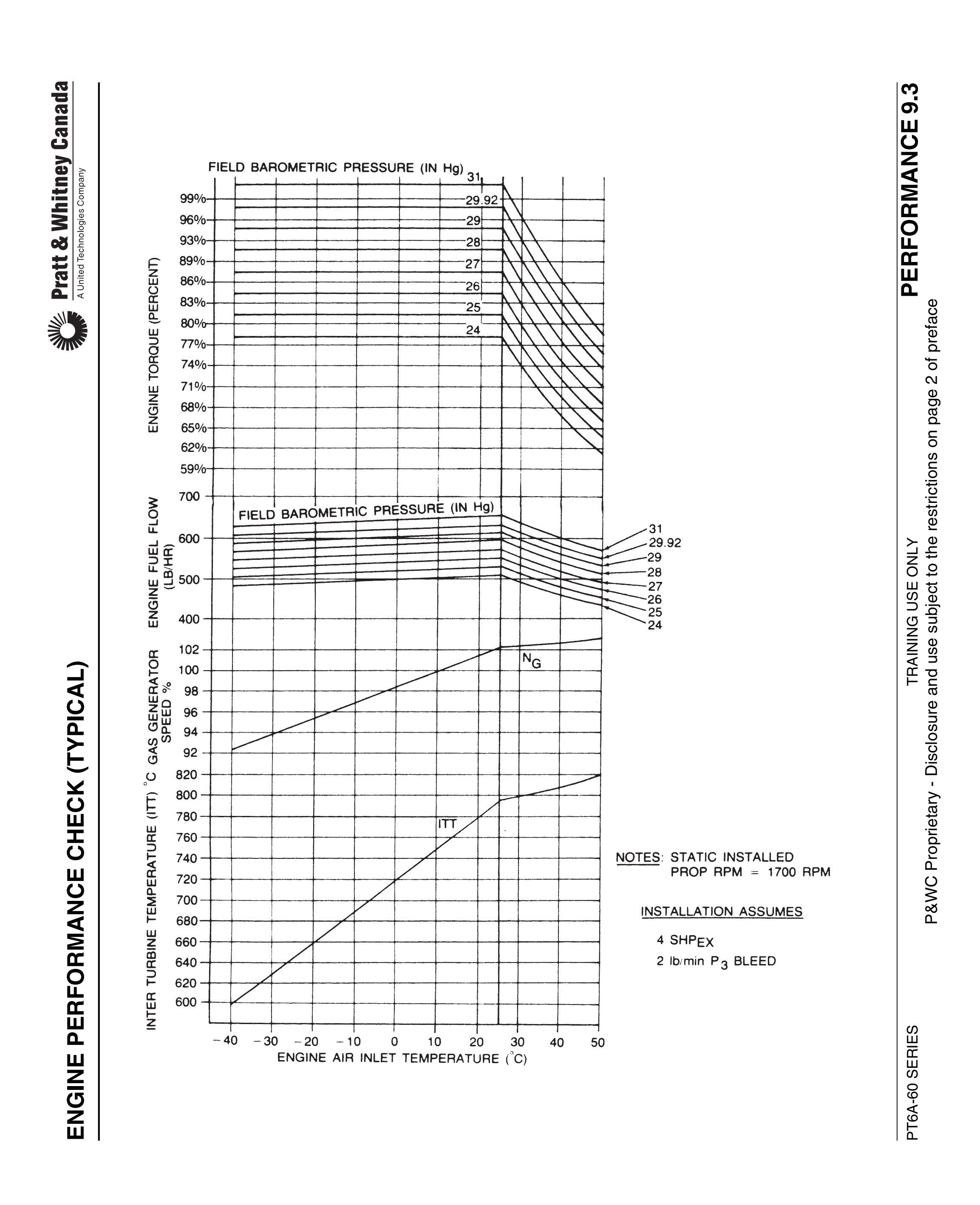


Figura 64: Curvas pertinentes a los motores PT6-60s

6.3. Curva de eficiencia de la hélice

Dado que no se disponía de curvas proporcionadas por el fabricante, se optó por emplear el método numérico propuesto por *U.P Solies* en su trabajo titulado "Numerical Method for Estimation of Propeller Efficiencies"(Solies, 1994). Los resultados de este método se obtienen mediante la resolución de un proceso iterativo regido por las siguientes expresiones:

$$\eta = \eta_0 \cdot \eta_i$$

$$T = (\eta \cdot P/V)$$

$$\left(\frac{\Delta V}{2}\right) = -\left(\frac{V}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{V^2}{4}\right) + \left(\frac{T}{2\rho A}\right)}$$

$$\eta_i = \frac{V}{V + \left(\frac{\Delta V}{2}\right)}$$

Este método proporciona una estimación fundamental de la eficiencia de la hélice cuando no se dispone de información directa del fabricante. Los resultados obtenidos se detallan en la Tabla 29.

Tabla 29: Resultados obtenidos.

V	η	V	η
10.00	0.53	60.00	0.76
15.00	0.58	65.00	0.77
20.00	0.62	70.00	0.78
25.00	0.65	75.00	0.79
30.00	0.67	80.00	0.80
35.00	0.69	85.00	0.80
40.00	0.71	90.00	0.81
45.00	0.73	100.00	0.82
50.00	0.74	110.00	0.83
55.00	0.75	120.00	0.84
		150.00	0.86

Luego, se realizó un ajuste numérico a los puntos obtenidos utilizando las herramientas proporcionadas por la librería Scipy de Python (consultar *scipy.optimize.curve_fit*). La expresión de ajuste se presenta en la Ec. 81. Los resultados y la curva ajustada se muestran en la Figura 65.

$$\eta_h = -2{,}7837E{-}09 \cdot V^4 + 1{,}0935E{-}06 \cdot V^3 + -1{,}6159E{-}04 \cdot V^2 + 1{,}1873E{-}02 \cdot V + 4{,}3272E{-}01 \quad (81)$$

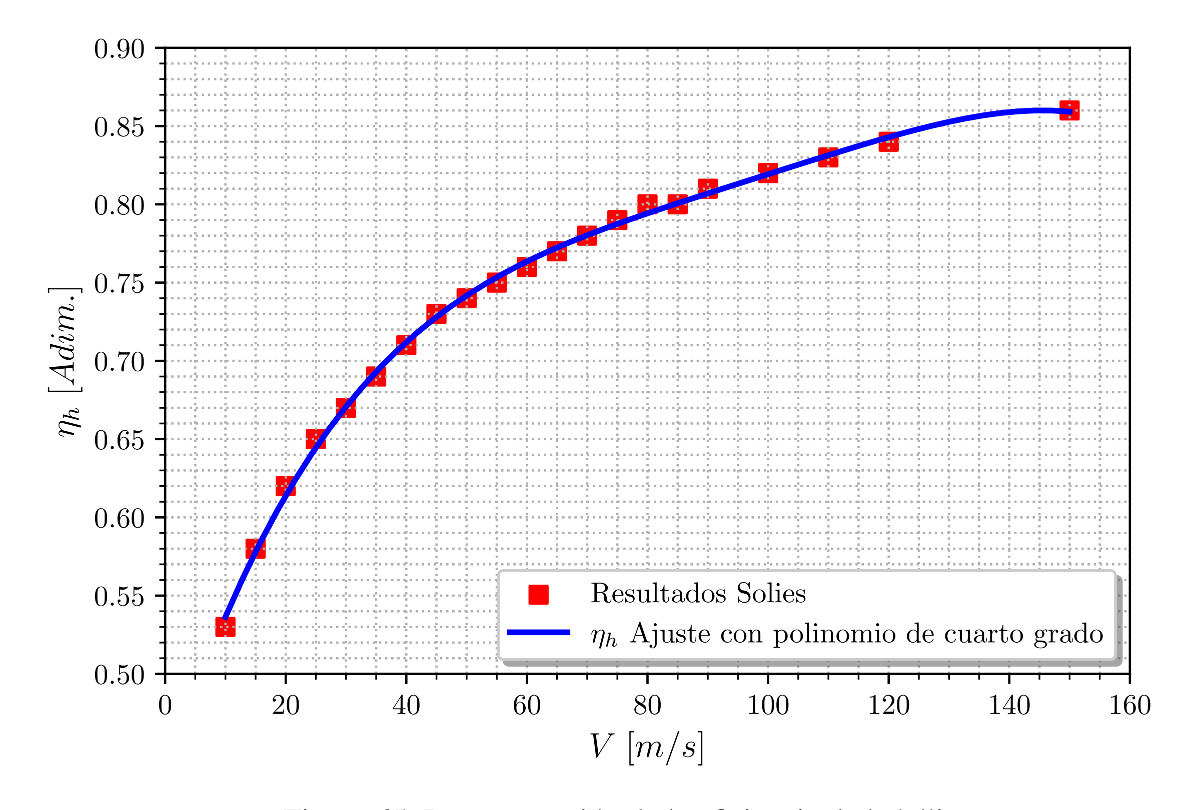


Figura 65: Representación de la eficiencia de la hélice.

6.4. Consumo específico en crucero

A partir de la Figura 64 fue posible relevar la variación del flujo de combustible con la presión atmosférica (la cual se encuentra dada en pulgadas de mercurio). Utilizando las expresiones de la atmósfera estándar, teniendo en cuenta los dos motores y realizando las conversiones de unidades correspondientes se pudo ajustar una expresión de flujo de combustible $[N/h]$ vs altitud $[m]$. Dicha expresión resulta:

$$F_F = -0{,}6424 \cdot h + 5621{,}40$$

Obtenida una expresión para la variación del flujo de combustible, se obtiene el consumo específico en crucero haciendo uso de la Expresión 80 como sigue:

$$c_p = \frac{F_F}{P_{eje}}$$

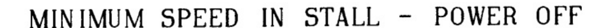
Finalmente el consumo específico para el crucero resultó:

$$c_{p_{crucero}} = 1{,}17\text{E-}06 \left[\frac{N}{Ws}\right]$$

6.5. Velocidades de pérdida y coef. sustentación máx.

6.5.1. Condición de despegue

Para la condición de despegue, se determinó la velocidad de pérdida considerando el peso máximo al despegue (12000 kg) y una deflexión de flaps de 15°. Con esta información, se pudo determinar la velocidad de pérdida consultando el manual del fabricante de la aeronave, como se muestra en la Figura 66.



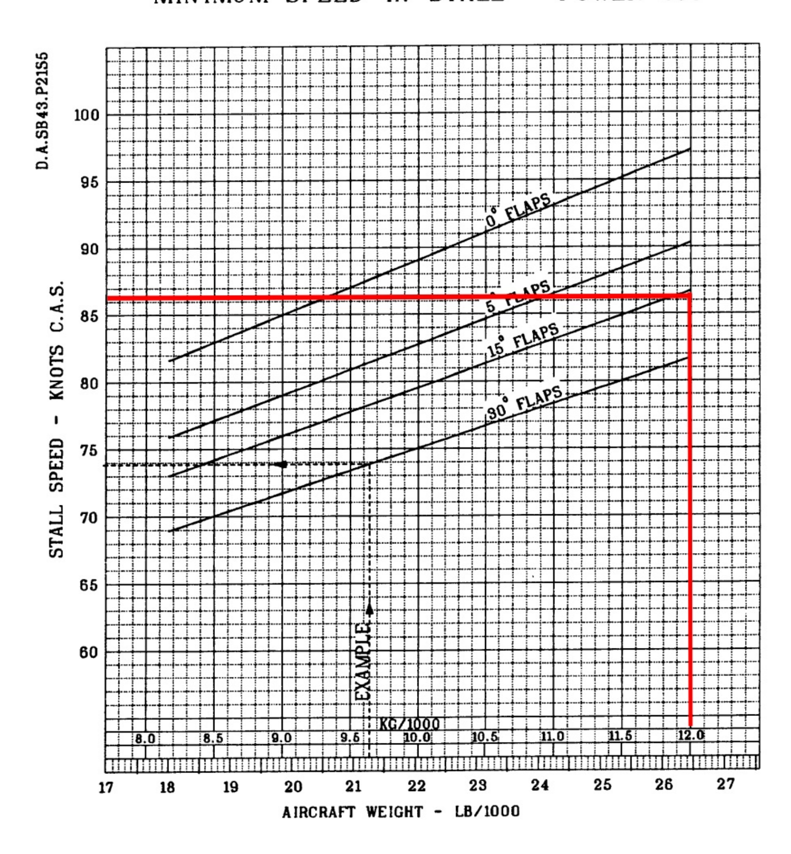


Figura 66: Velocidad de pérdida en condición de despegue

Dado que la velocidad de pérdida obtenida del gráfico en la Figura 66 corresponde a la velocidad calibrada (CAS), se procede a calcular la velocidad verdadera (TAS). Es importante señalar que se asume un factor f_c igual a uno, ya que no se tienen en cuenta los efectos de compresibilidad.

$$EAS = f_c \cdot CAS = TAS \cdot \left(\frac{\rho_\infty}{\rho_{MSL}}\right)^{0,5}$$

$$TAS_{stall,TO} = V_{stall,TO} = 44{,}24 \left[\frac{m}{s}\right]$$

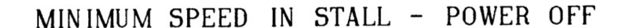
Luego por otro lado, teniendo ya esta velocidad se determinó el $C_{L_{max}}$ para la condición de despegue, el mismo resulta:



$$C_{L_{max}} = \frac{2W}{\rho S V_{stall,TO}^2} = 2{,}4333$$

6.5.2. Condición de aterrizaje

Para la condición de aterrizaje se procedió de forma análoga a lo detallado anteriormente, para la condición de aterrizaje se tomó el máximo peso al aterrizaje (11840 kg) y una deflexión de flaps de 30°. Con esta información, se pudo determinar la velocidad de pérdida consultando el manual del fabricante de la aeronave, como se muestra en la Figura 67.



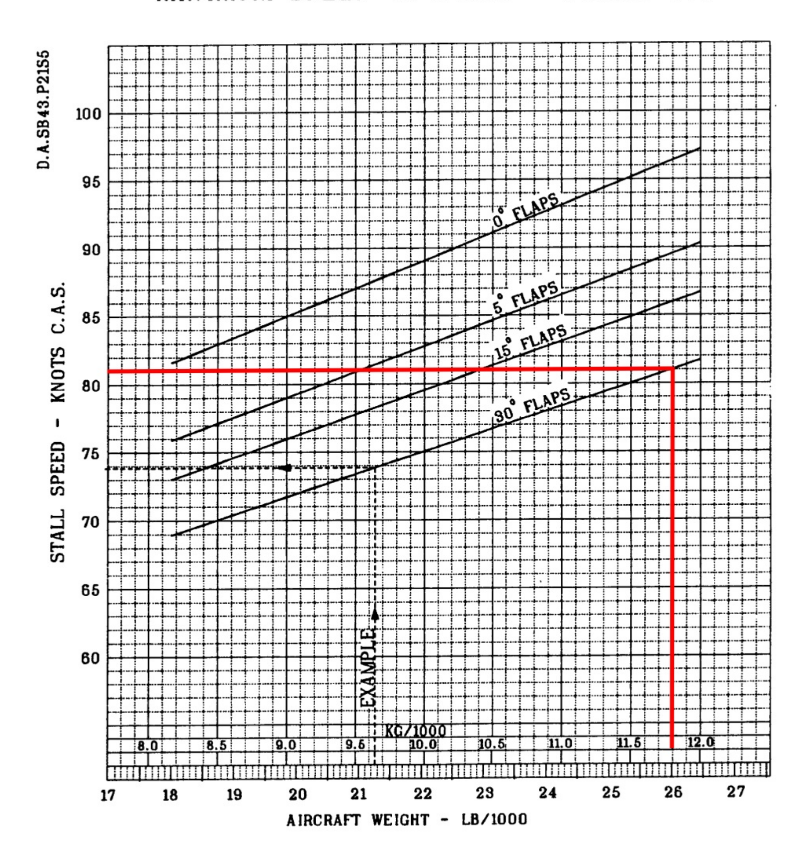


Figura 67: Velocidad de pérdida en condición de aterrizaje

Luego resultaron:

$$TAS_{stall,LD} = V_{stall,LD} = 41{,}67 \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$C_{L_{max}} = \frac{2W}{\rho S V_{stall,LD}^2} = 2{,}7065$$



6.6. Pendiente ala - fuselaje

Para la determinación de la pendiente de sustentación ala - fuselaje $(C_{L_\alpha})_{wf}$ se siguió la metodología propuesta por la cátedra de *Aerodinámica I* (Cátedra de Aerodinámica I, 2021). La misma se encuentra dada por la Expresión 82. Basicamente consiste en multiplicar a la pendiente del ala por un factor de corrección K_I.

$$(C_{L_\alpha})_{wf} = a_{wb} = K_I (C_{L_\alpha})_w \tag{82}$$

donde el factor K_I se calcula de la siguiente forma:

$$K_I = 1 + 2{,}15 \frac{b_f}{b} \frac{S_e}{S_w} + \frac{\pi}{2(C_{L_\alpha})_w} \frac{b_f^2}{S_w}$$

en donde:

$(C_{L_\alpha})_w = 5{,}7597$	Pendiente del ala $[1/rad]$
$S_w = 42{,}73$	Superficie alar $[m^2]$
$S_e = 36{,}79$	Superficie alar expuesta $[m^2]$
$b = 22{,}80$	Envergadura $[m]$
$b_f = 2{,}30$	Ancho del fuselaje $[m]$

El valor de $K_I = 1,0815$; por lo que la pendiente del ala - fuselaje resultó:

$$a_{wb} = 6{,}2290\ [1/rad]$$



6.7. Centro aerodinámico ala - fuselaje

La posición del centro aerodinámico de la combinación ala-fuselaje se puede obtener aplicando la Expresión 83 (Cátedra de Aerodinámica I, 2021).

$$\left(\frac{x_{ac}}{\bar{c}}\right)_{wf} = \left(\frac{x_{ac}}{\bar{c}}\right)_{w} + \frac{\Delta f_1 x_{ac}}{\bar{c}} + \frac{\Delta f_2 x_{ac}}{\bar{c}} \tag{83}$$

en donde:

$$\frac{\Delta f_1 x_{ac}}{\bar{c}} = -\frac{1{,}8}{(C_{L_\alpha})_{wf}} \frac{b_f h_f l_{f_n}}{S\,\bar{c}}$$

es una corrección experimental de la contribución de las secciones aguas arriba del ala y

$$\frac{\Delta f_2 x_{ac}}{\bar{c}} = \frac{0{,}273}{(1+\lambda)\bar{c}^2} \frac{b_f c_g (b - b_f)}{(b + 2{,}15 b_f)} \tan \Lambda_{1/4}$$

Tiene en cuenta la pérdida de sustentación del ala dentro del fuselaje y es derivada del método *DATCOM*.
en donde:

$(C_{L_\alpha})_{wf} = 5{,}7597$	Pendiente del ala $[1/rad]$
$b_f = 2{,}30$	Ancho del fuselaje $[m]$
$h_f = 2{,}82$	Alto del fuselaje $[m]$
$l_{f_n} = 8{,}60$	Distancia nariz del fuselaje al B.A. $[m]$
$\bar{c} = 1{,}99$	Cuerda media aerodinámica $[m]$
$\bar{c_g} = 1{,}85$	Cuerda media geométrica $[m]$
$S = 42{,}73$	Superficie alar $[m^2]$
$b = 22{,}80$	Envergadura $[m]$
$\Lambda_{1/4c} = 0{,}30$	Ángulo de flecha al cuarto de cuerda $[DEG]$

Resulta:

$$\left(\frac{x_{ac}}{\bar{c}}\right)_{wf} = 0{,}0611 \tag{84}$$

6.8. Coeficiente de momento libre ala - fuselaje

Para obtener el valor del coeficiente de momento libre de la configuración ala-fuselaje se siguió la metodología propuesta por la cátedra de *Aerodinámica I* ((Cátedra de Aerodinámica I, 2021)), representada por la Expresión 85.

$$(C_{m_{ac}})_{wb} = (C_{m_{ac}})_{w} + \Delta f C_{m_{ac}} \tag{85}$$

Donde $(C_{m_{ac}})_{w}$ corresponde al momento libre del ala y la corección $\Delta f C_{m_{ac}}$ se obtiene a partir de la teoría de Munk, con la Expresión 86

$$\Delta f C_{m_{ac}} = -1{,}8\left(1 - \frac{2{,}5 b_f}{l_f}\right)\left(\frac{\pi b_f h_f l_f}{4 S_w \bar{c}}\right)\frac{C_{L_0}}{(C_{L_\alpha})_{wb}} \tag{86}$$

Teniendo como datos:

$(C_{m_{ac}})_{w} = -0{,}0805$	Coeficiente de momento libre del ala $[Adim]$
$b_f = 2{,}30$	Ancho del fuselaje $[m]$
$h_f = 2{,}82$	Alto del fuselaje $[m]$
$l_f = 21{,}2$	Largo del fuselaje $[m]$
$\bar{c} = 1{,}99$	Cuerda media aerodinámica $[m]$
$S = 42{,}73$	Superficie alar $[m^2]$
$(C_{L_\alpha})_{wf} = 5{,}7597$	Pendiente del ala $[1/rad]$
$C_{L_0} = 0{,}4866$	Coeficiente de sustentación libre $[Adim]$

Obteniendo así:

$$(C_{m_{ac}})_{wb} = -0{,}2106$$

Análogo al procedimiento anterior, pero teniendo en consideración la condición de despegue del aeronave, se obtiene:

$$(C_{m_{ac}})_{wb} = -0{,}4534$$

6.9. Pendiente del empenaje horizontal y el empenaje vertical

6.9.1. Empenaje Horizontal

Para determinar la pendiente de sustentación del empenaje horizontal se empleó la formula de *Polhamus* (Ver Expresión 87), en dicha expresión se requiere el alargamiento A_R del empenaje horizontal, el parámetro de *Prandtl Glauert* β_{PG}, la flecha a la mitad de cuerda $\Lambda_{c/2}$ y la relación entre la pendiente de sustentación del perfil y la téorica de perfiles delgados k.

$$C_{L_{\alpha,h}} = \frac{2\pi A_R}{2 + \sqrt{\left(\frac{A_R \beta_{PG}}{k}\right)^2 + \left(1 + \frac{\tan(\Lambda_{c/2})^2}{\beta_{PG}^2}\right) + 4}} \qquad (87)$$

en este caso $A_R = 5{,}6918$, la pendiente del perfil NACA 0012 $c_{l_\alpha} = 5{,}7869 \cdot [1/rad]$, $\beta_{PG} = 0{,}9525$ y $\Lambda_{c/2} = 0°$. La pendiente del empenaje horizontal resulta:

$$C_{L_{\alpha,h}} = a_t = 4{,}3523\ [1/rad]$$

6.9.2. Empenaje Vertical

Para la determinación del empenaje vertical también se empleó la formula de *Polhamus* (Ver Expresión 87) aunque previamente para aplicarla se determinó el alargamiento efectivo del empenaje vertical, $A_{R_{v,eff}}$, este se determina a partir de la Expresión 88.

$$A_{R_{v,eff}} = \left(\frac{A_{R(B)}}{A_{R_v}} A_{R_v}\right)\left[1 + K_H\left(\frac{A_{R_{v,(HB)}}}{A_{R_{v,(B)}}} - 1\right)\right] = 3,1770 \qquad (88)$$

en donde los parámetros necesarios para aplicar la Expresión 88 se obtuvieron de las gráficas de las Figura 68. Luego aplicando la formula de *Polhamus* con la pendiente del perfil NACA 0016 $c_{l_\alpha} = 5{,}5290 \cdot [1/rad]$, $\beta_{PG} = 0{,}9525$ y $\Lambda_{c/2} = 22°$. La pendiente del empenaje horizontal resulta:

$$C_{L_{\alpha,v}} = a_v = 4{,}2288\ [1/rad]$$

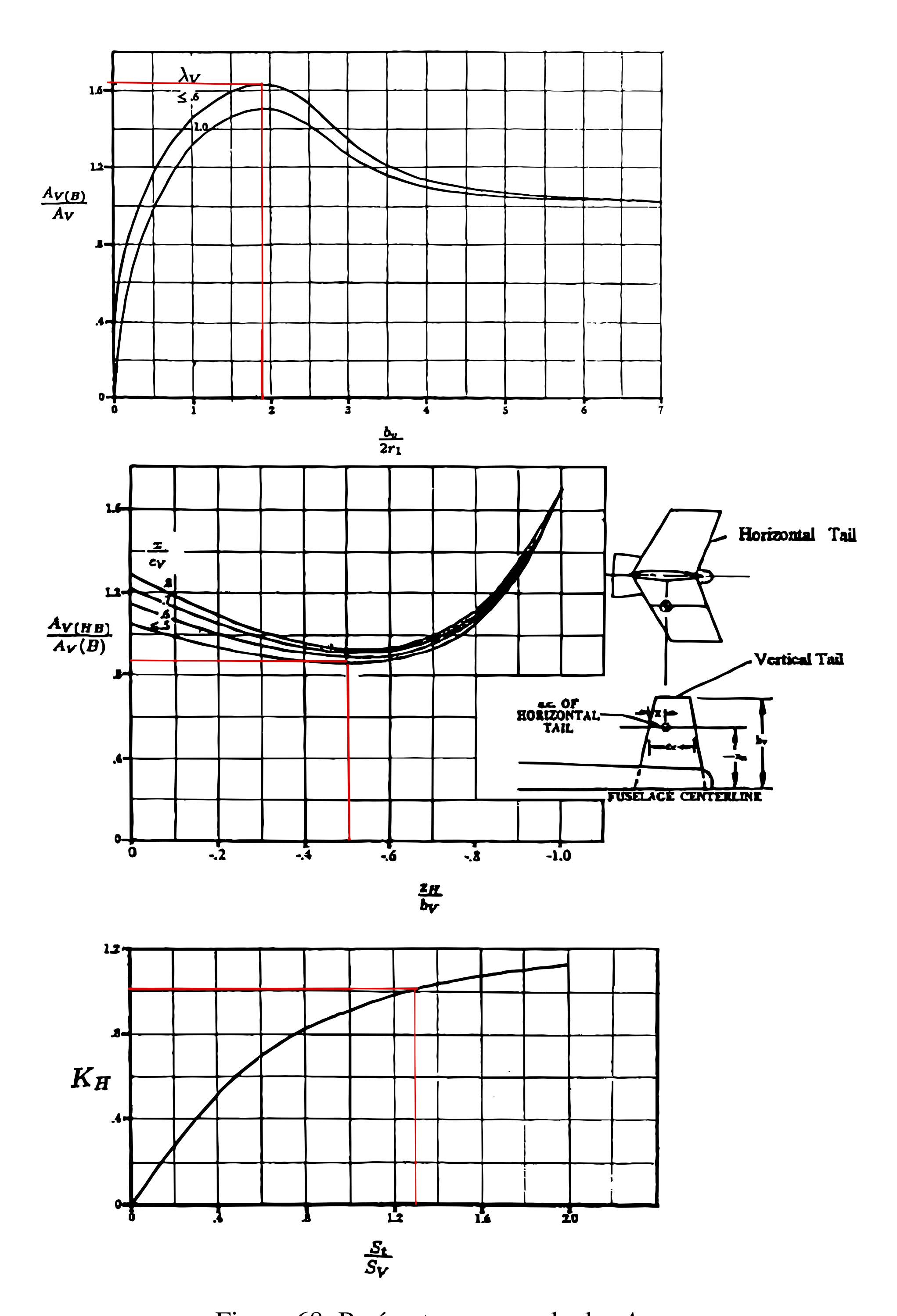


Figura 68: Parámetros para calcular $A_{R_{v,eff}}$

6.10. Gradiente de Downwash

Para determinar la expresión general del *downwash* promedio en el empenaje horizontal del avión asignado utilizando el método ESDU 80020 (ESDU, 2012). El método es aplicable a configuraciones dentro de los límites siguientes:

Alargamiento	$2 < A < 12$
Ahusamiento	$0 < \lambda < 1$
Flecha	$0 < \Lambda_{1/4} < 52°$
Ancho del fuselaje	$0{,}1 < w/b < 0{,}2$
Posición $\xi_T = \frac{x_T}{b/2}$	$0{,}5 < \xi_T < 2$
Posición $\eta_T = \frac{s_T}{b/2}$	$0{,}2 < \eta_T < 0{,}8$
Posición $\zeta_T = \frac{Z_T}{b/2}$	$-0{,}2 < \zeta_T < 0{,}6$
Número de Reynolds basado en $\bar{\bar{c}}$	$0{,}5 \times 10^6 < Re_{\bar{\bar{c}}} < 15 \times 10^6$
Número de Mach	Los que permitan las reglas de similitud subsónica

6.10.1. Proceso de cálculo

El procedimiento se encuentra sintetizado en el siguiente listado:

1. Con el alargamiento A y el producto de $A \cdot tan(\Lambda_{1/2})$ en la Figura 13 del report (Ver Figuras del report) se obtiene H_{P_∞}.

2. Con la $Tan(\Lambda_{1/4})$ y la inversa de $1/\xi_T$ en la Figura 14 (Ver Figura del report) se obtiene H_{P_e}. Empleando la Expresión 89 se determina H_P.

$$H_P = H_{P_e} - (1 - H_{P_\infty}) \tag{89}$$

3. Con el alargamiento A y H_{P_∞} en la Figura 15 (Ver Figura del report) se obtiene ΔH_P

4. Con el ahusamiento λ, el alargamiento A, η_T y $A \cdot Tan(\Lambda_{1/2})$ en las Figuras 16, 17,18 y 19 (Ver Figuras del report), se obtiene F. Mediante la Expresión 90 se puede obtener el gradiente promedio del downwash en el empenaje cuando éste está inmerso en la lámina vorticosa ($\zeta_T = 0$).

$$\left(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\alpha}\right)_0^* = \frac{2}{\pi}\frac{a}{A}(H_P + \Delta H_P)F \tag{90}$$

5. Con el alargamiento A en Figura 20 (Ver Figura del report) se puede obtener B. Con la Expresión 91 se puede obtener la variación del downwash en el plano de la estela.

$$\left(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\alpha}\right)_0 = B\left(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\alpha}\right)_0^* \tag{91}$$



6. Con $\frac{(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\alpha})_0}{\frac{a}{A}F}$ en la Figura 21 se obtiene $\frac{\left|\frac{\partial}{\partial\zeta_T}(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\alpha})\right|}{\frac{a}{A}F}$ por lo que se determina exactamente el valor de $\left|\frac{\partial}{\partial\zeta_T}\left(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\alpha}\right)\right|$; para colas bajas se debe multiplicar este factor por 1,3.

   Para $Mach = 0$ se puede contemplar el efecto de la distancia entre ambos mediante la Relación 92.

$$\left(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\alpha}\right)_{M=0} = \left(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\alpha}\right)_0 - |\zeta_T| \left|\frac{\partial}{\partial\zeta_T}\left(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\alpha}\right)\right| \tag{92}$$

7. Con el valor del Mach en crucero, en la Figura 23 (Ver Figura del report) se obtiene K_M y es posible corregir la expresión 92 con la expresión 93

$$\left(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\alpha}\right)_M = \left(\frac{d\bar{\epsilon}}{d\alpha}\right)_{M=0} \cdot K_M \tag{93}$$

8. Con la diferencia enter $\zeta_T - \zeta_B$, en la Figura 22 (Ver Figura del report) se obtiene $\bar{\epsilon}_{l_0}$. Finalmente con la expresión 94 se obtiene la expresión para $\bar{\epsilon}$.

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_{l_0} + \left(\frac{d\epsilon}{d\alpha}\right)(\alpha - \alpha_{l_0}) \tag{94}$$

Para la aeronave luego de aplicar la metodología esto resultó:

$$\bar{\epsilon} = 0{,}0597 + 0{,}3640\ \alpha$$

6.11. Momentos de Inercia

Los momentos de inercia de la aeronave fueron estimados siguiendo la metodología propuesta por la bibliografía recomendada por la cátedra (Chawla, 1952).

Los momentos de inercia fueron estimados teniendo en cuenta los *radios de giro adimensionales* de referencia para el tipo de aeronave que estamos tratando, para este caso, la misma es una aeronave de transporte. Los valores tomados como referencia fueron los dados por la Tabla 30.

Tabla 30: Radios de giro adimensionales para la aeronave

Radios de giro adimensionales			
Tipo de avión	R_x	R_y	R_z
Carga - Transporte	0,2900	0,3300	0,4220

Los radios de giro adimensionales R_x, R_y y R_z se encuentran definidos por la Expresión 95.

$$R_x = \frac{k_x}{b/2} \qquad R_y = \frac{k_y}{L/2} \qquad R_z = \frac{k_z}{e/2} \tag{95}$$

Luego, a partir de ellos, se pueden determinar los radios de giro dimensionales teniendo en cuenta los valores de la envergadura $b = 22{,}80$ $[m]$, el largo de la aeronave $L = 21{,}58$ $[m]$ y el parámetro $e = (1/2)(b + L) = 22{,}19$ $[m]$. Los valores de dichos radios de giro dimensionales resultan:

$$k_x = 3{,}3060 \ [m]$$
$$k_y = 3{,}5607 \ [m]$$
$$k_z = 4{,}6821 \ [m]$$

Finalmente a partir de los resultados obtenidos, se pueden estimar los momentos de inercia siguiendo la Expresión 96, en donde $W/g = 9587$ $[kg]$ (masa en condición crucero).

$$I_{est} = \frac{W}{g}k^2 \tag{96}$$

Los momentos de inercia de la aeronave resultan:

$$I_x = 104785 \ [Kgm^2]$$
$$I_y = 121553 \ [Kgm^2]$$
$$I_z = 210172 \ [Kgm^2]$$